Fondements de Finance

SAI – FM03 – Programme Grande Ecole

Chapitre 8. : Choix optimal de portefeuille et Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers

(Introduction à la théorie du choix de portefeuille et au MEDAF)

Fahmi Ben Abdelkader ©
ESCP, Paris

Version étudiants

Plan du chapitre

1. ## Mesures de la rentabilité et du risque d'un portefeuille d'actions

   Espérance de rentabilité d'un portefeuille
   Combinaison des risques au sein d'un portefeuille
   Variance, covariance et corrélation d'un portefeuille composé de deux titres
   Variance d'un portefeuille composé de N titres

2. ## Choix optimal de portefeuille (Intro à la théorie de choix de portefeuille)

   Portefeuilles efficients et courbe d'efficience : cas des portefeuilles de 2 titres
   Portefeuille efficient
   Prise en compte des ventes à découvert
   Les portefeuilles efficients composés de N titres et la frontière d'efficience

3. ## Mesure du risque de marché (systématique)

   Portefeuille efficient et le portefeuille de marché
   Le Bêta (β) : une mesure du risque de marché
   Les méthodes de calcul du Bêta
   Le Bêta en pratique

4. ## Introduction au MEDAF (CAPM)

   La relation risque - rentabilité espérée – prime de risque
   La droite de marché
   Le MEDAF et le portefeuille d'actions
   Le MEDAF en pratique

La rentabilité historique versus espérée d'un portefeuille

La part de chaque actif dans la valeur totale du portefeuille est exprimée par x_i :

$$x_i = \frac{\text{Valeur du titre } i}{\text{Valeur totale du portefeuille}} \quad \text{Avec} \quad \sum_i x_i = 1$$

La **rentabilité historique** d'un portefeuille P composé de deux titres est ainsi :

$$R_p = x_1.R_1 + x_2.R_2$$

En généralisant pour un portefeuille à N titres : $R_p = x_1.R_1 + \cdots + x_N.R_N = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$

La **rentabilité espérée** d'un portefeuille P composé de deux titres est ainsi :

$$E[R_p] = x_1.E[R_1] + x_2.E[R_2]$$

En généralisant pour un portefeuille à N titres : $E[R_p] = \sum_{i=1}^{N} x_i E[R_i]$

La rentabilité historique versus espérée d'un portefeuille

Exemple **11.2** (B&DM – p.342) – la rentabilité espérée d'un portefeuille

- Nicolas a acheté pour 10 000 € d'actions EADS et 30 000 € d'actions Total
- Les rentabilités annuelles espérées d'EADS et de Total sont respectivement de 10 % et 16 %.
- Quelle est l'espérance de rentabilité du portefeuille ?

Comment varie le risque d'un portefeuille selon le type d'actions qui le composent ?

Tableau**11.1** (B&DM – p.342) – Rentabilités d'actions et de portefeuilles de deux actions

Année	Rentabilités des actions			Rentabilités des portefeuilles (1)	Rentabilités des portefeuilles (2)
	Air Med	Europe Air	Pétrole Plus	$\frac{1}{2} R_{Air\ Med} + \frac{1}{2} R_{Europe\ Air}$	$\frac{1}{2} R_{Europe\ Air} + \frac{1}{2} R_{Pétrole\ Plus}$
2003	21 %	9 %	–2 %	15,0 %	3,5 %
2004	30 %	21 %	–5 %	25,5 %	8,0 %
2005	7 %	7 %	9 %	7,0 %	8,0 %
2006	–5 %	–2 %	21 %	–3,5 %	9,5 %
2007	–2 %	–5 %	30 %	–3,5 %	12,5 %
2008	9 %	30 %	7 %	19,5 %	18,5 %
Rentabilité moyenne	10 %	10 %	10 %	10 %	10 %
Volatilité	13,4 %	13,4 %	13,4 %	12,1 %	5,1 %

1. La combinaison des actions au sein d'un portefeuille réduit le risque grâce à la diversification

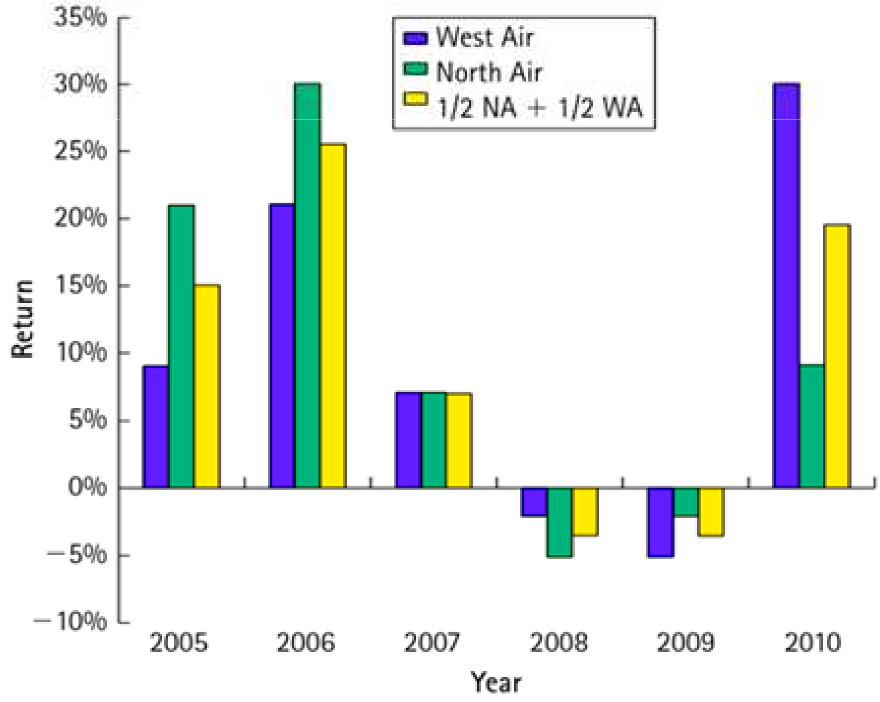
   ➡ La volatilité de chacun des portefeuilles est plus faible que celles des actions qui les composent

2. La part du risque éliminé d'un portefeuille dépend du niveau de risque systématique (ou commun) auquel sont exposées les actions

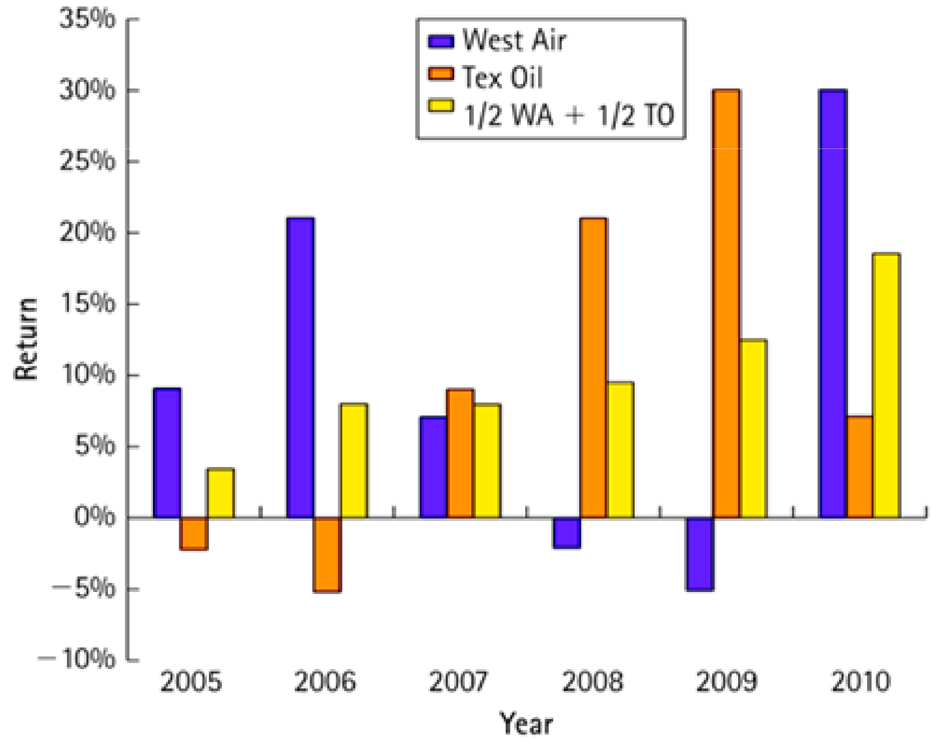
   ➡ Ce risque commun peut être apprécié par la tendance ou non des prix des actions à évoluer de manière conjointe (Ex. les rentabilités des actions des compagnies aériennes ont tendance à baisser ou à augmenter en même temps)

Comment varie le risque d'un portefeuille selon le type d'actions qui le composent ?

Portfolio split equally between North Air and West Air



Portfolio split equally between West Air and Texas Oil



To find the risk of a portfolio, one must know the degree to which the stocks' returns move together.

➡ **Covariance**

La covariance et la corrélation : mesures du risque commun

La covariance est une mesure de la variation simultanée de deux variables

La covariance espérée des rentabilité R_i et R_j

$$Cov(R_i, R_j) = E[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])]$$

La covariance historique des rentabilité R_i et R_j

$$Cov(R_i, R_j) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j)$$ sa valeur est comprise dans $]-\infty; +\infty[$

1. Si la $Cov(R_i,R_j) > 0$:
   - Les rentabilités des deux actions ont tendance à évoluer ensemble dans le même sens
2. Si la $Cov(R_i,R_j) < 0$:
   - Les rentabilités des deux actions ont tendance à évoluer de manière contraire

La covariance et la corrélation : mesures du risque commun

Exemple :

Quelle est la covariance des rentabilités de Air Med et Europe Air en 2003 et 2004

$$Cov(R_i, R_j) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j)$$

	Écart à la moyenne		
Dates	$(R_{AM} - \overline{R_{AM}})$	$(R_{EA} - \overline{R_{EA}})$	**Cov (Air Med ; Europa Air)**
2003	11%	-1%	-0.0011 ❶
2004	20%	11%	0.0220 ❷

❶ Les rentabilités des deux actions ont tendance à évoluer de manière contraire

❷ Les rentabilités des deux actions ont tendance à évoluer ensemble dans le même sens

Limite : si la covariance indique le sens de variation des rentabilités, elle ne renseigne pas le niveau de corrélation entre les écarts de variations des rentabilités respectives

➡ Le coefficient de …………………..

La covariance et la corrélation : mesures du risque commun

La corrélation mesure le niveau de dépendance entre deux variables

Coefficient de corrélation

$$Corr(R_i, R_j) = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_{R_i} . \sigma_{R_j}}$$

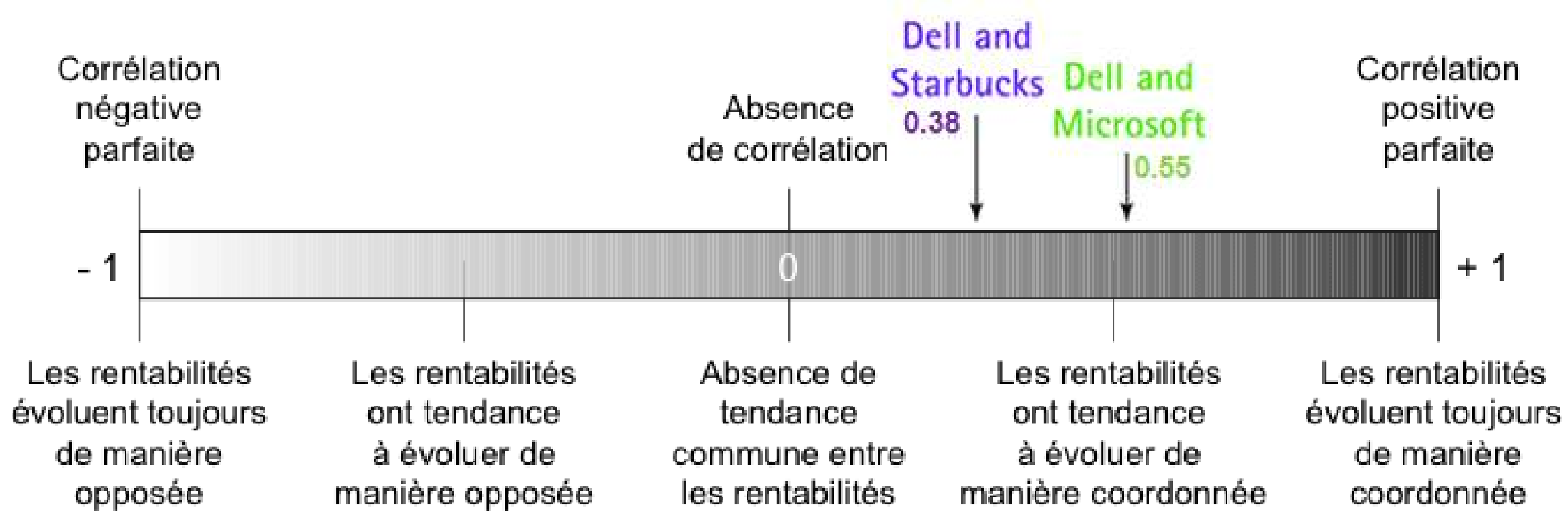
sa valeur est comprise dans **[− 1;+1]**

1. Si ***Corr*** **(R_i,R_j) = +1** :
   - Les rentabilités des deux actions sont positives ou négatives en même temps et leurs variations en % sont identiques

2. Si ***Corr*** **(R_i,R_j) = -1** :
   - Les sens de variation des deux actions sont opposées et leurs variations en % sont identiques

La covariance et la corrélation : mesures du risque commun

La corrélation mesure le niveau de dépendance entre deux variables



Exemple : Corr (R_{AirMed}, $R_{EuropaAir}$) = 62% ; => les rentabilités des deux actions ont tendance à évoluer de manière conjointe …

➡ **en raison de leur exposition commune au risque systématique**

La covariance et la corrélation : mesures du risque commun

Exemple 11.3 (B&DM-p.344) : covariance et corrélation

Année	Écarts à la moyenne			Air Med et Europe Air	Europe Air et Pétrole Plus
	$(R_{AM} - \bar{R}_{AM})$	$(R_{EA} - \bar{R}_{EA})$	$(R_{PP} - \bar{R}_{PP})$	$(R_{AM} - \bar{R}_{AM})(R_{EA} - \bar{R}_{EA})$	$(R_{EA} - \bar{R}_{EA})(R_{PP} - \bar{R}_{PP})$
2003	11 %	–1 %	–12 %	–0,0011	0,0012
2004	20 %	11 %	–15 %	0,0220	–0,0165
2005	–3 %	–3 %	–1 %	0,0009	0,0003
2006	–15 %	–12 %	11 %	0,0180	–0,0132
2007	–12 %	–15 %	20 %	0,0180	–0,0300
2008	–1 %	20 %	–3 %	–0,0020	–0,0060
			=	0,0558	–0,0642

$$Cov(R_i, R_j) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j) \quad = \quad 0{,}0112 \qquad -0{,}0128$$

$$Corr(R_i, R_j) = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_{R_i} \cdot \sigma_{R_j}} \quad = \quad 62{,}00\ \% \qquad -71{,}33\ \%$$

La covariance et la corrélation : mesures du risque commun

Tableau **11.2** (B&DM-p.346) : Ecarts types et corrélations de quelques actions françaises

	Peugeot	Renault	BNP Paribas	Société Générale	Vivendi Universal
Écart type	27 %	35 %	23 %	28 %	34 %
Corrélation avec					
Peugeot	100 %	57 %	43 %	50 %	33 %
Renault	57 %	100 %	31 %	31 %	32 %
BNP Paribas	43 %	31 %	100 %	82 %	39 %
Société Générale	50 %	31 %	82 %	100 %	38 %
Vivendi Universal	33 %	32 %	39 %	38 %	100 %

- **Les corrélations entre les rentabilités de différentes actions sont d'autant plus proches de 1 qu'elles sont influencées par les mêmes évènements économiques**

Variance et écart type d'un portefeuille

La variance d'un portefeuille se calcule à partir de la covariance des titres composant le portefeuille

Variance d'un portefeuille composé de deux titres

$$Var(R_P) = x_1^2 Var(R_1) + x_2^2 Var(R_2) + 2x_1 x_2 Cov(R_1, R_2)$$

$$Var(R_P) = x_1^2 Var(R_1) + x_2^2 Var(R_2) + 2x_1 x_2 Corr(R_1, R_2) SD(R_1) SD(R_2)$$

Variance d'un portefeuille composé de N titres

$$Var(R_P) = \sum_i \sum_j x_i x_j Cov(R_i, R_j)$$

La volatilité d'un portefeuille

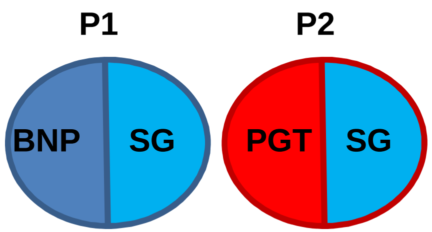
$$SD = \sqrt{Var(R_P)}$$

Pour la démonstration, voir B&DM p.347

Variance et écart type d'un portefeuille

Exemple : quelle est la volatilité d'un portefeuille équipondéré composé d'actions de BNP et Société générale (P1)? Même question pour Peugeot et société générale (P2).

	BNP	SG	Peugeot
Écart type	37%	50%	38%
Corrélation avec			
BNP	100%	62%	25%
SG	62%	100%	19%
Peugeot	25%	19%	100%



La variance de P1 et P2:

$$Var(R_P) = x_1^2 Var(R_1) + x_2^2 Var(R_2) + 2x_1x_2 Corr(R_1, R_2) SD(R_1) SD(R_2)$$

La volatilité de P1 et P2:

Corrélation et volatilité d'un portefeuille

La volatilité d'un portefeuille est d'autant plus faible que la corrélation entre les actions qui le composent est petite

Le risque total d'un portefeuille est influencé par les volatilités des titres qui le composent, en fonction de leurs poids relatifs et de la proportion d'exposition au risque commun

➡ La volatilité d'un portefeuille sera toujours inférieure à la moyenne pondérée des volatilités des titres qui le composent

La diversification d'un portefeuille contribue alors à réduire son risque total plus que sa rentabilité

La corrélation n'influence pas la rentabilité espérée d'un portefeuille, mais seulement sa volatilité

Plan du chapitre

1 Mesures de la rentabilité et du risque d'un portefeuille d'actions

Espérance de rentabilité d'un portefeuille
Combinaison des risques au sein d'un portefeuille
Variance, covariance et corrélation d'un portefeuille composé de deux titres
Variance d'un portefeuille composé de N titres

2 Choix optimal de portefeuille (Intro à la théorie de choix de portefeuille)

Portefeuilles efficients et courbe d'efficience : cas des portefeuilles de 2 titres
Portefeuille efficient
Prise en compte des ventes à découvert
Les portefeuilles efficients composés de N titres et la frontière d'efficience

3 Mesure du risque de marché (systématique)

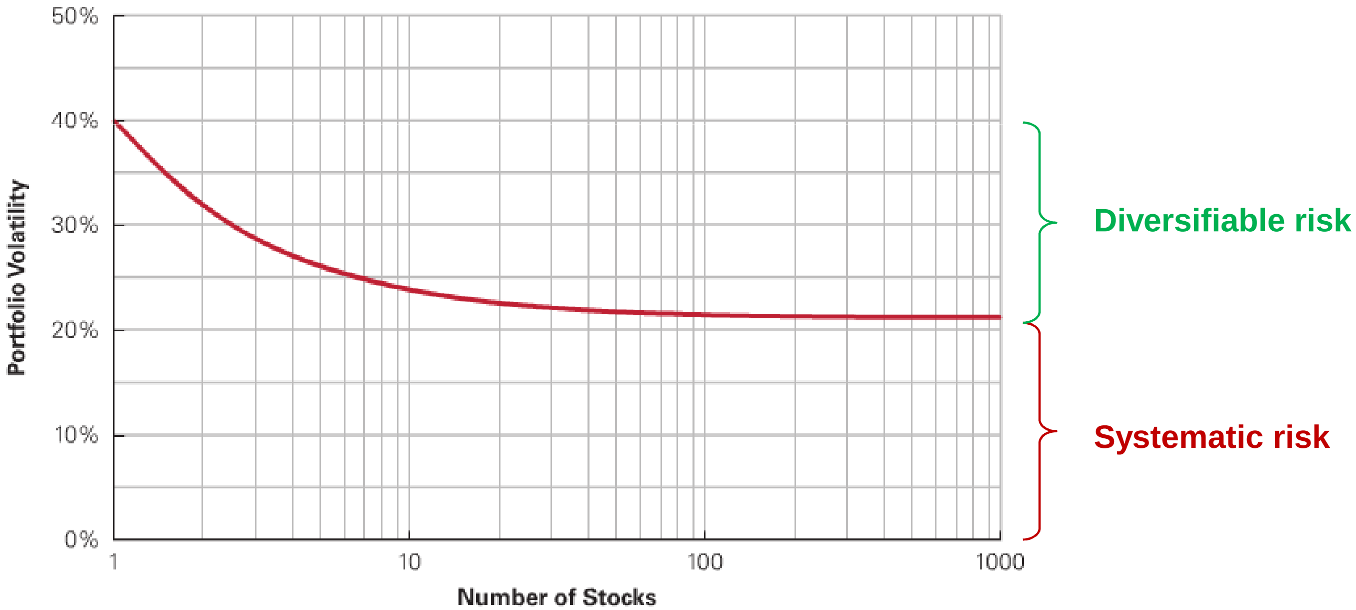
Portefeuille efficient et le portefeuille de marché
Le Bêta (β) : une mesure du risque de marché
Les méthodes de calcul du Bêta
Le Bêta en pratique

4 Introduction au MEDAF (CAPM)

La relation risque - rentabilité espérée – prime de risque
La droite de marché
Le MEDAF et le portefeuille d'actions
Le MEDAF en pratique

Introduction

Fig. **11.2** (B&DM – p.350) – Volatilité d'un portefeuille équipondéré en fonction de sa taille



Source : Berk J. and DeMarzo P. (2011), Corporate Finance, Second Edition. Pearson Education. (Figure 11.2 p.339)

Le bénéfice de la diversification décroît avec le nombre de titres composant le P

- La baise du risque est plus importante lorsque l'on passe d'un à deux titres que de 100 à 101
- A quel seuil doit-on arrêter d'intégrer de nouvelles actions dans notre portefeuille ? Quelle est la taille optimale d'un portefeuille ?
- Un arbitrage doit être fait sur le nombre de titres à inclure dans le P => atteindre une **diversification efficiente**

Portefeuille efficient avec deux actions

Exemple

Considérons un portefeuille composé de deux actions: Intel et Coca-Cola. Supposons que ces deux actions sont non corrélés et qu'ils ont les caractéristiques suivantes:

	Expected Return	Volatility
Intel	26%	50%
Coca-Cola	6%	25%

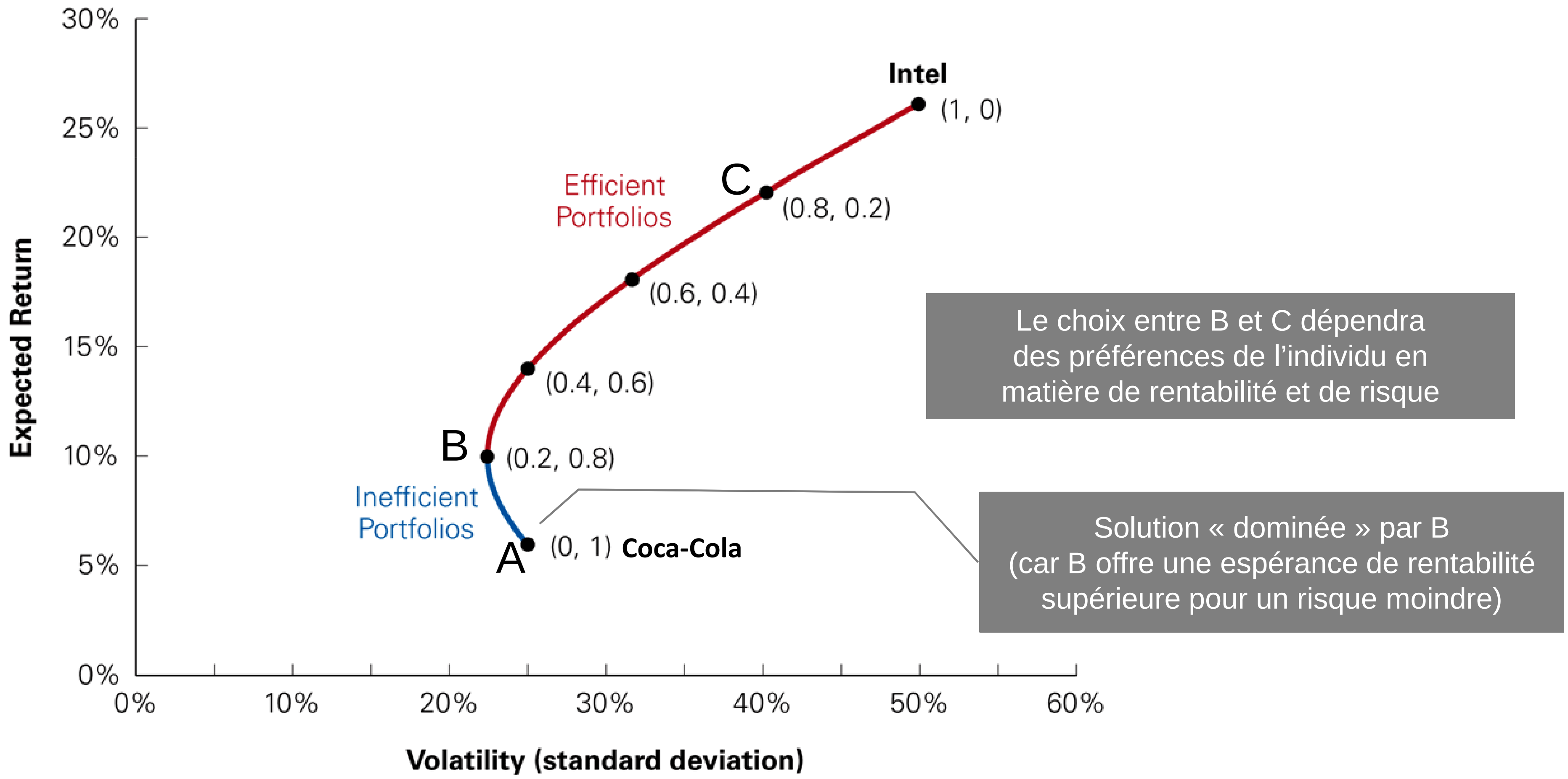
Si les données sont stables dans l'avenir, quel portefeuille l'investisseur doit-il détenir ?

- Il faut disposer d'une base de comparaison/arbitrage de plusieurs combinaisons des deux actions

Portfolio Weights		Expected Return (%)	Volatility (%)
x_I	x_C	$E[R_P]$	$SD[R_P]$
0%	100%	6%	25.0%
20%	80%	10%	22.3%
40%	60%	14%	25.0%
60%	40%	18%	31.6%
80%	20%	22%	40.3%
100%	0%	26%	50.0%

Portefeuille efficient avec deux actions

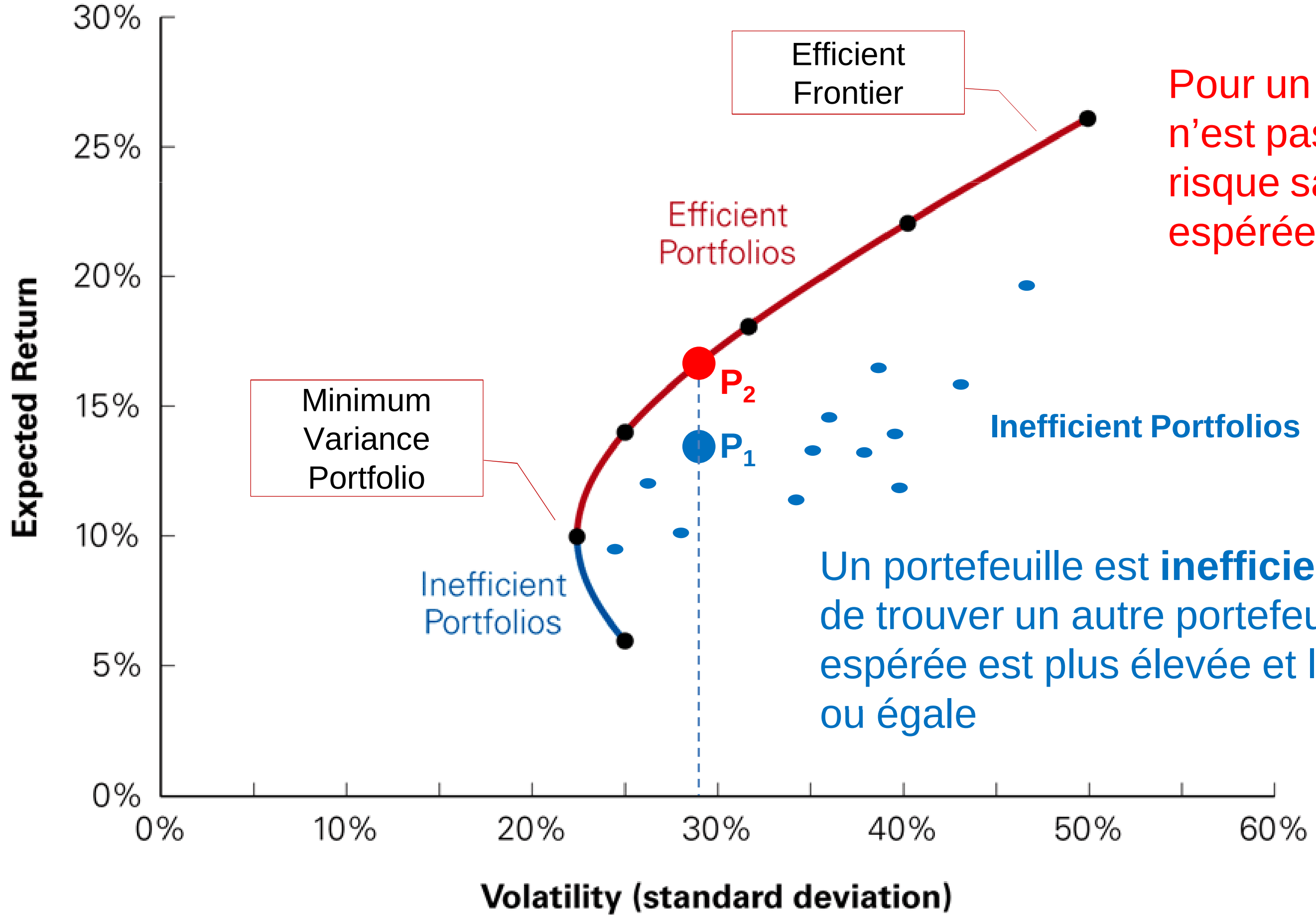
Arbitrage entre rentabilité espérée et risque pour les portefeuilles composés de deux actions



Exemple: Un ami a investit 100% de son argent dans des actions Coca-Cola. Il vous demande un conseil. Il souhaite obtenir la rentabilité espérée la plus élevée possible sans augmenter le risque. Quel portefeuille recommanderiez vous?

Portefeuille efficient avec deux actions

Arbitrage entre rentabilité espérée et risque pour les portefeuilles composés de deux actions



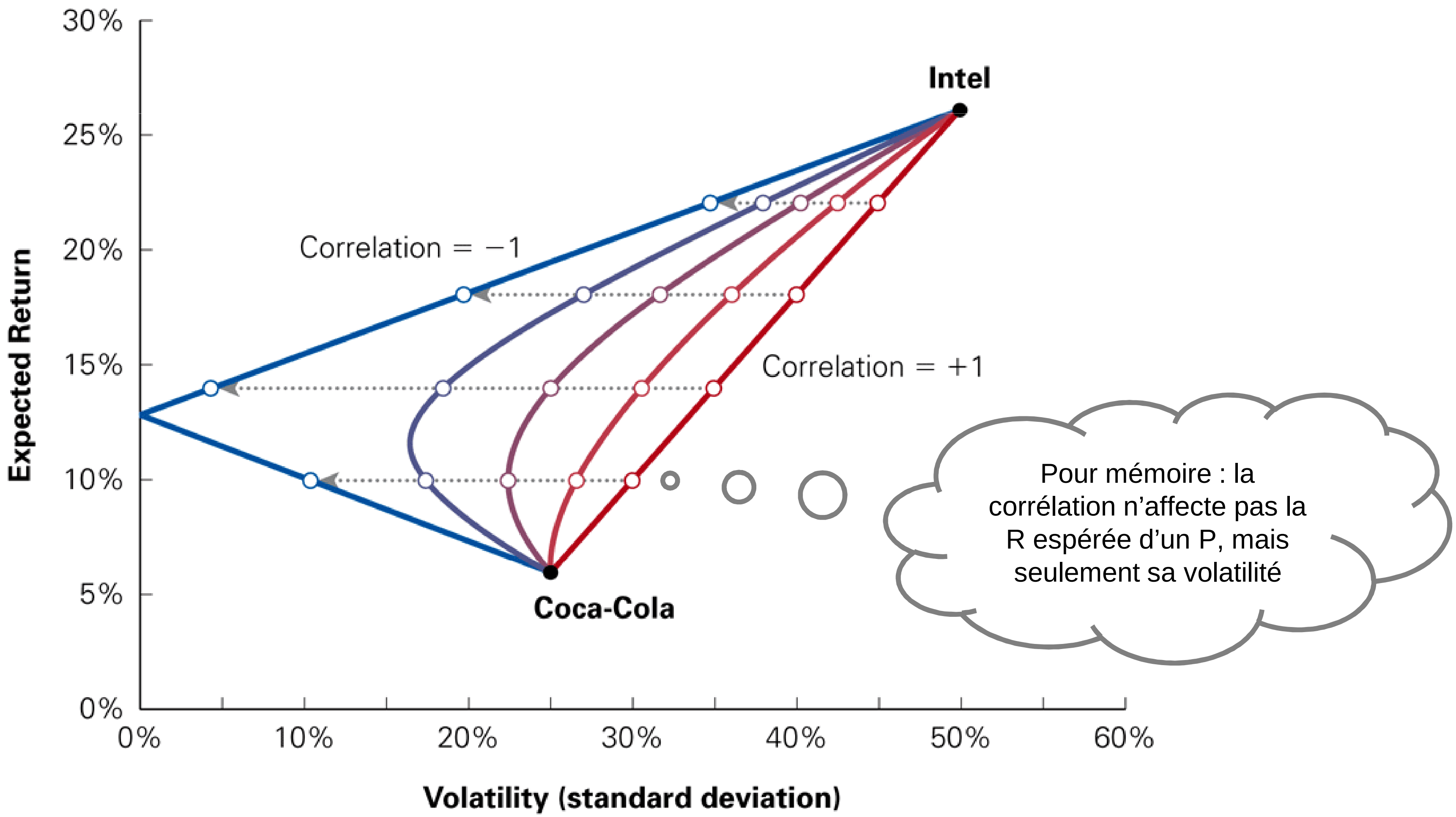
Pour un portefeuille efficient: il n'est pas possible de réduire le risque sans réduire la rentabilité espérée

Un portefeuille est **inefficient** lorsqu'il est possible de trouver un autre portefeuille dont la rentabilité espérée est plus élevée et la volatilité est inférieure ou égale

- **Un portefeuille efficient** : pour un même niveau de risque, il offre la rentabilité espérée la plus élevée

L'effet de la corrélation sur la volatilité d'un portefeuille

Ensemble des portefeuilles constitués d'actions Coca et Intel pour différents niveaux de corrélation



- Le risque du portefeuille est d'autant plus faible que la corrélation entre ses titres est faible

Principe de la Vente à Découvert

La vente à découvert consiste à vendre un titre que l'on ne détient pas (qu'on emprunte auprès d'un autre investisseur) et à le racheter ultérieurement en espérant que son prix baisse

En jargon de la Finance on dira que l'on a « *shorté* » ou « *vadé* » le titre

Quel est l'intérêt d'une vente à découvert ?

Peut être une stratégie d'investissement rentable pour un investisseur qui anticipe une baisse du prix d'un titre

	Date 0	Date t	Date 1
Cash flows from buying a stock	$-P_0$	$+Div_t$	$+P_1$
Cash flows from short selling a stock	$+P_0$	$-Div_t$	$-P_1$

Position courte dans un portefeuille

La pondération du titre vendu à découvert est négative (emprunt)

$\neq$

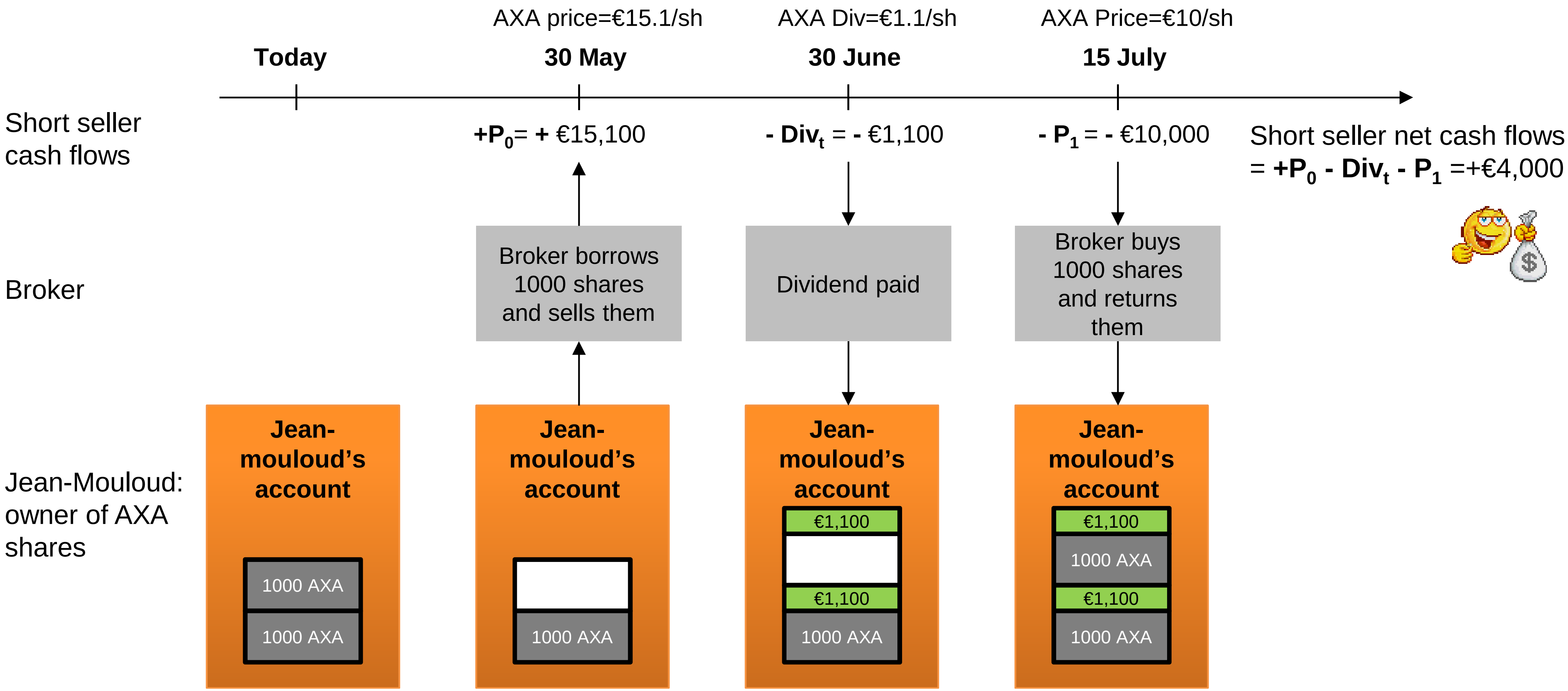
Position longue dans un portefeuille

La pondération du titre acheté est positive

Les mécanismes de la vente à découvert

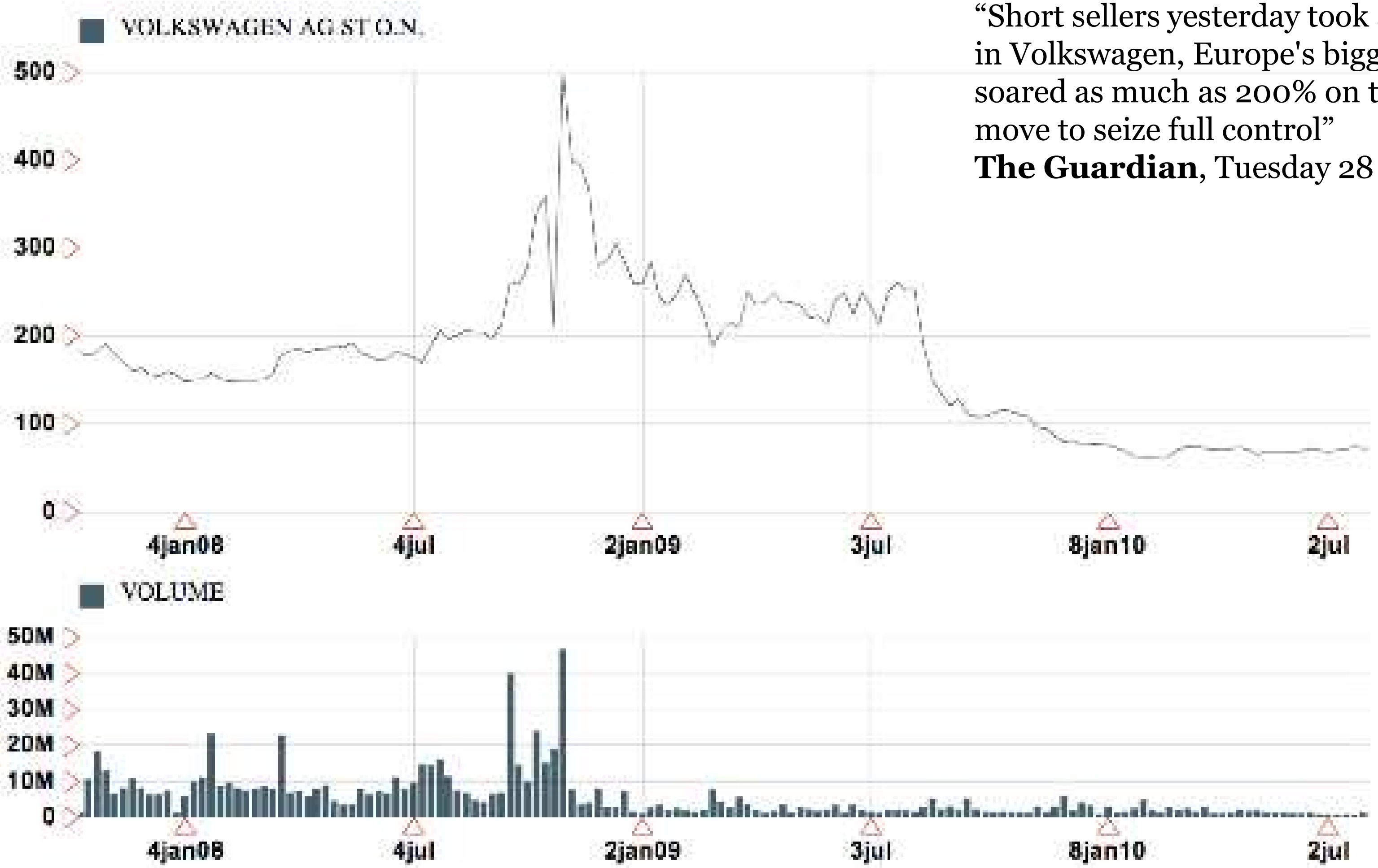
Exemple:

Vous anticipez une baisse du prix de l’action AXA. Vous décidez de vendre à découvert 1000 actions AXA et de clôturer votre position dès que le prix de l’action AXA tombe à 10€.



Vente à découvert : l'action Volkswagen, un cas d'école

VW Shares Plunge, a Day After Surge: the mystery of a 200% increase



"Short sellers yesterday took a pounding as shares in Volkswagen, Europe's biggest carmaker, soared as much as 200% on the back of Porsche's move to seize full control"
The Guardian, Tuesday 28 October 2008

Vente à découvert : quel impact sur la rentabilité et le risque

Problème

Le 29 décembre 2006, Paul dispose de 4 810€ à placer pendant un an. Il décide de vendre à découvert pour 5460€ d'actions Renault et d'acheter pour 10270€ d'actions Alstom. Alstom : volatilité = 50 % ; Renault : volatilité = 35 %. Les rentabilités de ces deux actions sont non corrélées. **1.** Quelle était la rentabilité de ce portefeuille ? **2.** La volatilité de ce portefeuille?

Date	Prix au 29 décembre 2006*	Prix au 31 décembre 2007*	Dividendes versés au cours de l'année 2007	Rentabilité effective en 2007**
Renault	91,00 €	97,01 €	3,10 €	10,0 %
Alstom	102,70 €	147,00 €	0,80 €	43,9 %

Vente à découvert : quel impact sur la rentabilité et le risque

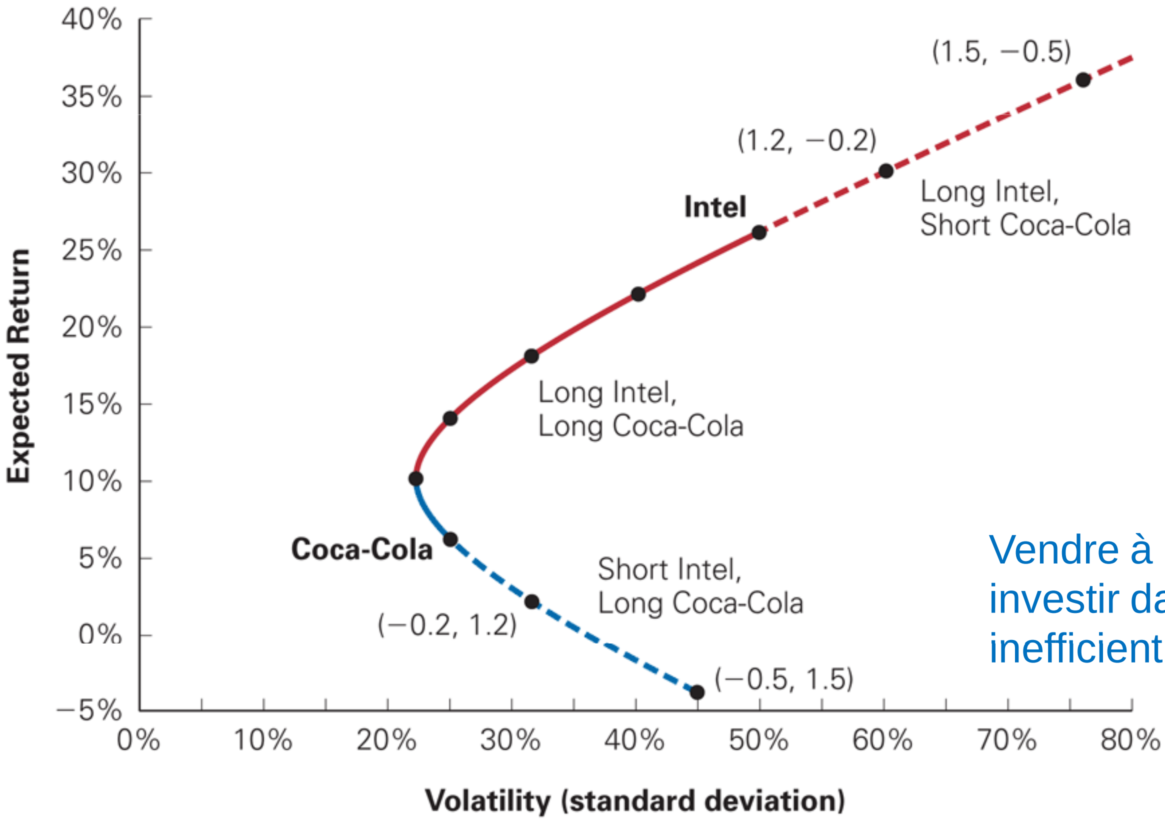
Problem: Expected Return and Volatility with a Short Sale

Suppose you have €20,000 in cash to invest. You decide to short sell €10,000 worth of Coca-Cola stock and invest the proceeds from your short sale, plus your €20,000, in Intel. What is the expected return and volatility of your portfolio?

	Expected Return	Volatility	Cov (Intel, Coca)
Intel	26%	50%	0
Coca-Cola	6%	25%	

Vente à découvert : quel impact sur la rentabilité et le risque

Arbitrage entre espérance de rentabilité et volatilité lorsque les ventes à découvert sont autorisées : les cas des portefeuilles composés de Intel et Coca-Cola



Vendre à découvert Coca-Cola pour investir dans Intel est efficient et peut être attractif pour un investisseur agressif à la recherche d'une plus grande rentabilité

Vendre à découvert Intel pour investir dans Coca-Cola est inefficient

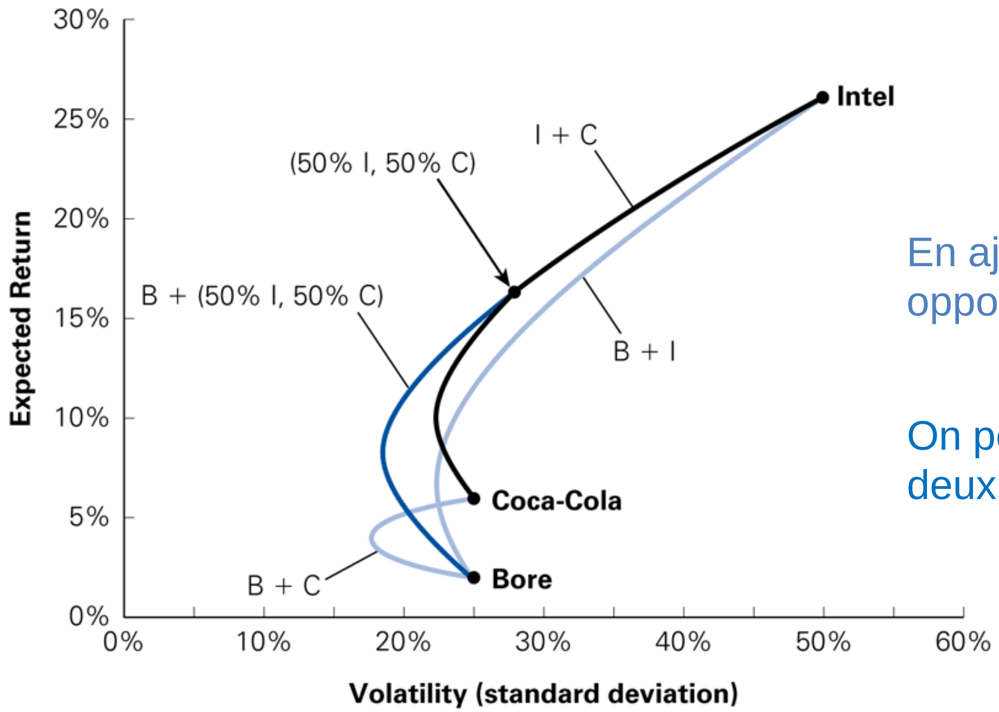
➡ La vente à découvert offre de nouvelles opportunités d'investissement

La frontière efficiente avec plusieurs actions

Inclure Bore Industries au portefeuille initial composé de deux actions:

A-t-on intérêt à inclure des actions Bore dans le portefeuille initial ?

			Correlation with		
Stock	**Expected Return**	**Volatility**	**Intel**	**Coca-Cola**	**Bore Ind.**
Intel	26%	50%	1.0	0.0	0.0
Coca-Cola	6%	25%	0.0	1.0	0.0
Bore Industries	2%	25%	0.0	0.0	1.0



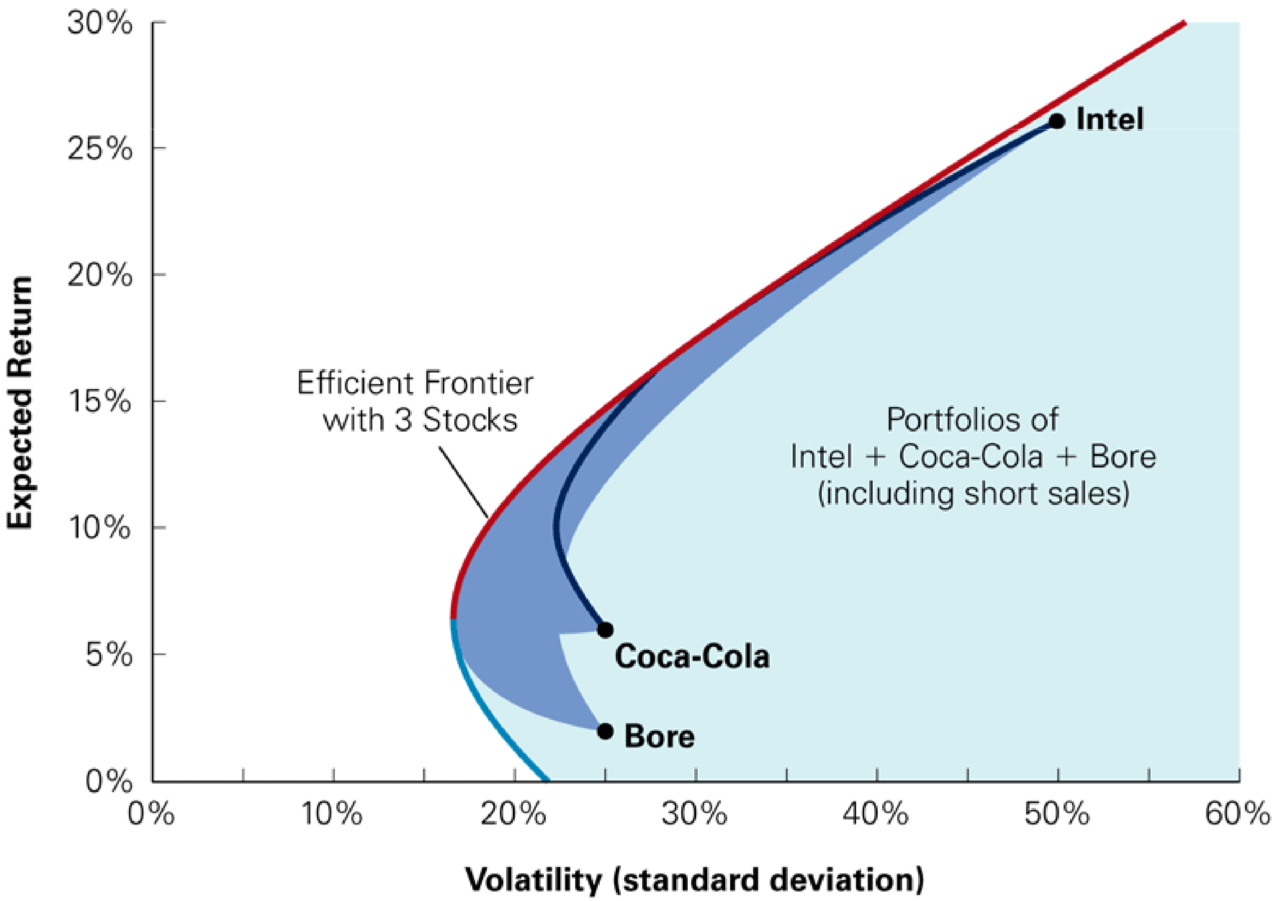
En ajoutant Bore, on peut obtenir de nouvelles opportunités d'investissement

On peut aussi faire mieux que le portefeuille avec deux actions: B+I+C > I+C

- Il faut examiner le **potentiel de diversification** offert par l'ajout d'actions Bore

La frontière efficiente avec plusieurs actions

Espérance de rentabilité et volatilité des portefeuilles composés de Intel, Coca-Cola, et Bore

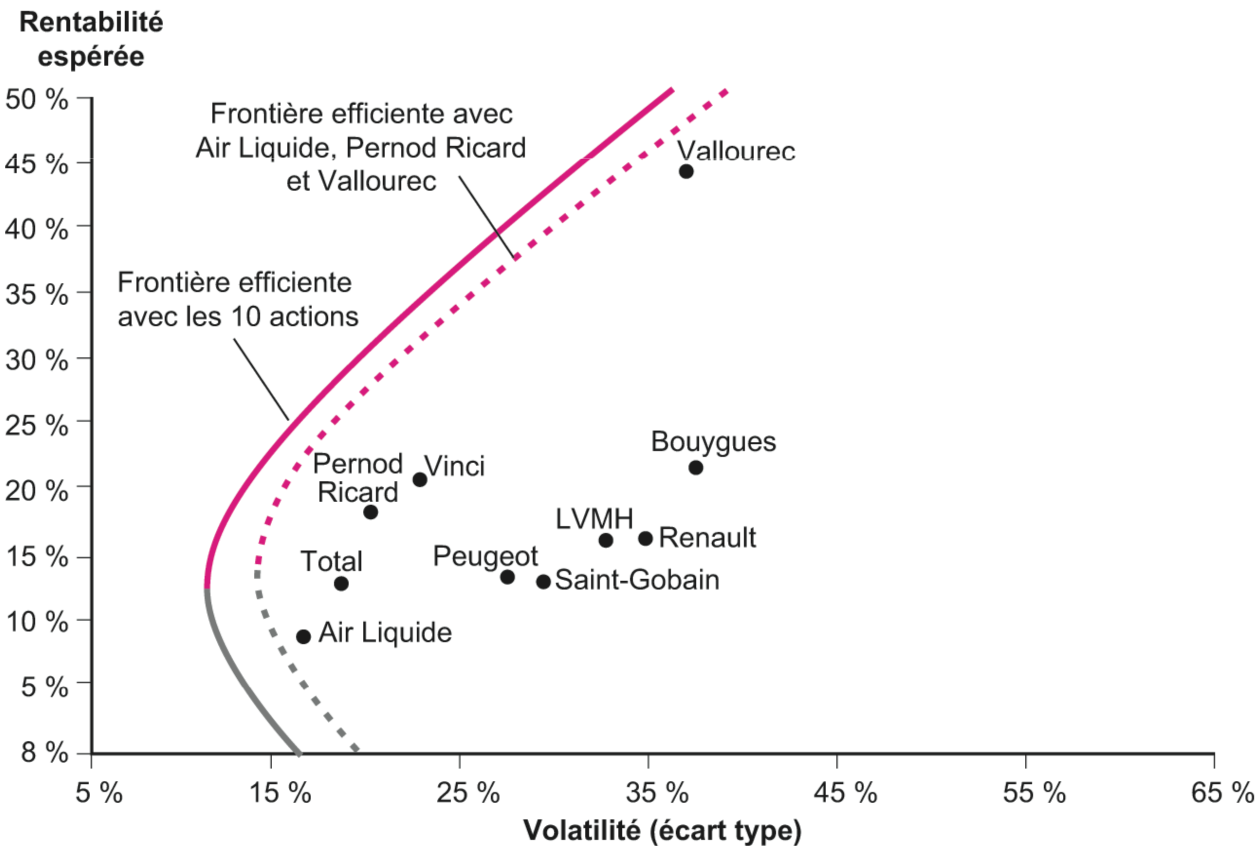


Source : Berk J. and DeMarzo P. (2011), Corporate Finance, Second Edition. Pearson Education. (Figure 11.7 p.348)

➡ Aucune des actions n'est située sur la frontière efficiente: ne détenir qu'une seule action n'est pas efficient

La frontière efficiente avec plusieurs actions

Fig. **11.8** (B&DM-p.363) : Frontières efficientes avec trois et dix actions



- Plus de titres ➡ Frontière effficiente se déplace vers la gauche
- ➡ Les bénéfices de la diversification augmentent

Combiner un actif sans risque et un portefeuille risqué

Est-il intéressant de combiner actif sans risque et actif risqué au sein d'un même portefeuille ?

Vous disposez des informations suivantes concernant deux types d'investissement.

Security	Return rate in one year		**Expected Return E[R]**	**Volatility**
	Sunny weather	Rainy weather		
Risk-free bond	+3%	+3%	**3%**	**0%**
Umbrella SA	-10%	+20%	**10%**	**20%**

Vous envisagez d'investir 100 000€ dans des actions Umbrella. Un ami vous suggère d'investir seulment une fraction de votre argent (50 000€) dans Umbrella et le reste dans des obligations d'Etat. Quel est l'effet de cette stratégie sur la rentabilité et la volatilité de votre investissement?

Security	Amount invested	Cash flows in one year		Average expected cash flows	**Expected Return E[R]**	**Volatility**
		Sunny weather	Rainy weather			
Risk-free bond	€50,000	€51,500	€51,500	€51,500	**3%**	**0%**
Umbrella SA	€50,000	€45,000	€65,000	€55,000	**10%**	**20%**
Total	€100,000	€95,500	€116,500	€106,500	**6.5%**	**10%**

➧ En combinant actif sans risque et actif risqué, on peut réduire le risque. Néanmoins, cette baisse du risque se fait au prix d'une baisse de la rentabilité.

Combiner un actif sans risque et un portefeuille risqué

Généralisons

un investisseur détient un portefeuille P composé exclusivement d'actifs risqués. Quelles sont les conséquences en termes de rentabilité et de risque si l'investisseur décide d'investir une **fraction x de sa richesse** en actifs risqués et le reste (1-x) en bons de trésor ?

Expected Return

$$E[R_P] = x_1.E[R_1] + x_2.E[R_2]$$

$$E[R_{xP}] = (1-x).r_f + x.E[R_P]$$

$$\Rightarrow \boxed{E[R_{xP}] = r_f + x.\left(E[R_P] - r_f\right)} \quad \textbf{1}$$

Volatility

$$Var(R_P) = x_1^2 Var(R_1) + x_2^2 Var(R_2) + 2x_1x_2Cov(R_1, R_2)$$

$$Var(R_{xP}) = (1-x)^2 \underbrace{Var(r_f)}_{0} + x^2 Var(R_P) + 2(1-x)x.\underbrace{Cov(r_f, R_P)}_{0}$$

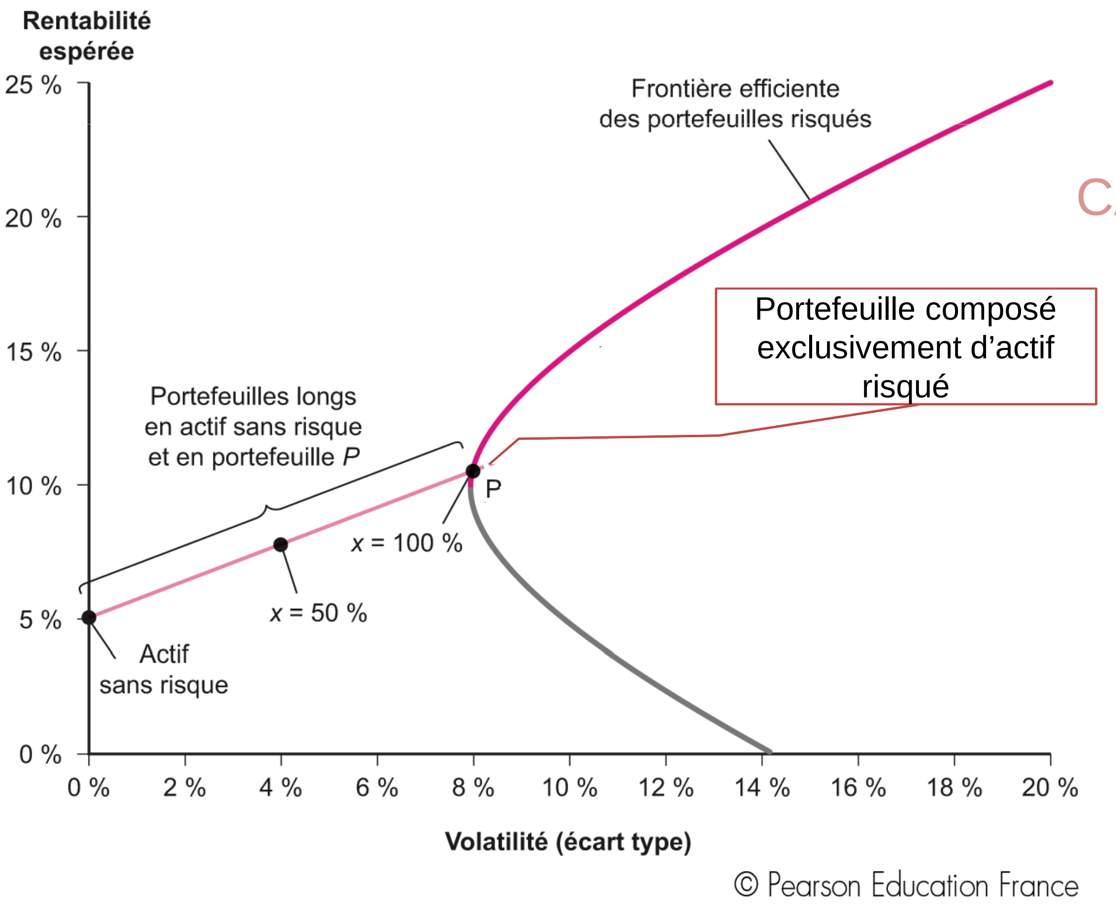
$$Var(R_{xP}) = x^2 Var(R_P) \Rightarrow \boxed{SD(R_{xP}) = x.SD(R_P)} \quad \textbf{2}$$

1 **2**

$$\Rightarrow \boxed{E[R_{xP}] = r_f + \frac{\left(E[R_P] - r_f\right)}{SD(R_P)}.SD(R_{xP})}$$

Combiner un actif sans risque et un portefeuille risqué

Fig. **11.9** (B&DM-p.366) : Couple rentabilité-risque des portefeuilles composés d'actif sans risque et d'un sous-portefeuille risqué (**Capital Allocation Line: CAL**)



CAL

$$E[R_{xP}] = r_f + \frac{(E[R_P] - r_f)}{SD(R_P)}.SD(R_{xP})$$

$$E[R_{xP}] = r_f + x.(E[R_P] - r_f)$$

- Lorsque la part x investie dans le portefeuille risqué P augmente, la prime de risque et le risque du portefeuille total (actif sans risque + portefeuille risqué) augmentent proportionnellement

Acheter des actions en empruntant de l'argent au taux sans risque: l'effet de levier

Est ce profitable d'acheter des actions en empruntant au taux sans risque?

Exemple: Vous diposez de 10 000€ et vous décidez d'emprunter 10 000€ au taux sans risque de 5%. Vous investissez la totalité (20 000€) dans des actions Umbrella (*P*). Calculer la rentabilité espérée et la volatilité de cet investissement.

	Return rate in one year		**Expected Return E[R]**	**Volatility**
Security	Sunny weather	Rainy weather		
Umbrella SA	-10%	+30%	**10%**	**20%**

$$E[R_{xP}] =$$

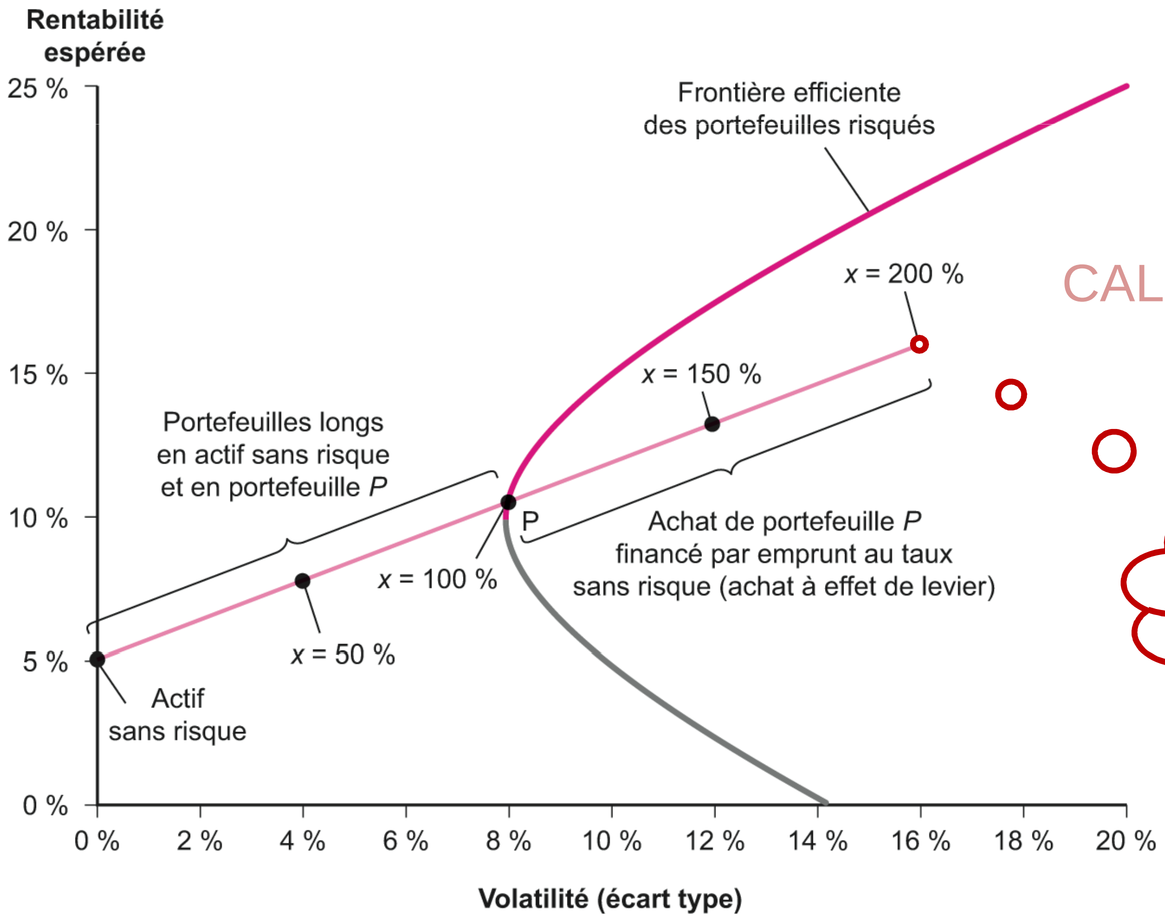
$$SD(R_{xP}) =$$

		Cash flows in one year				
Security	Amount invested	Sunny weather	Rainy weather	Average expected cash flows	**Expected Return E[R]**	**Volatility**
Loan	-€10,000	-€10,500	-€10,500	-€10,500	**-5%**	**-**
Umbrella SA	€20,000	€18,000	€26,000	€22,000	**10%**	**20%**
Total	€10,000	**€7,500 (-25%)**	**€15,500 (+55%)**	**€11,500**	**15%**	**40%**

➨ Le levier permettrait d'apporter une meilleure rentabilité espérée que l'utilisation de ses moyens propres. Néanmoins, il serait à l'origine d'un doublement du risque.

Acheter des actions en empruntant de l'argent au taux sans risque: l'effet de levier

Fig. **11.9** (B&DM-p.366) : Couple rentabilité-risque des portefeuilles composés d'actif sans risque et d'un sous-portefeuille risqué (**Capital Allocation Line: CAL**)



CAL —— $$E[R_{xP}] = r_f + \frac{(E[R_P]-r_f)}{SD(R_P)}.SD(R_{xP})$$

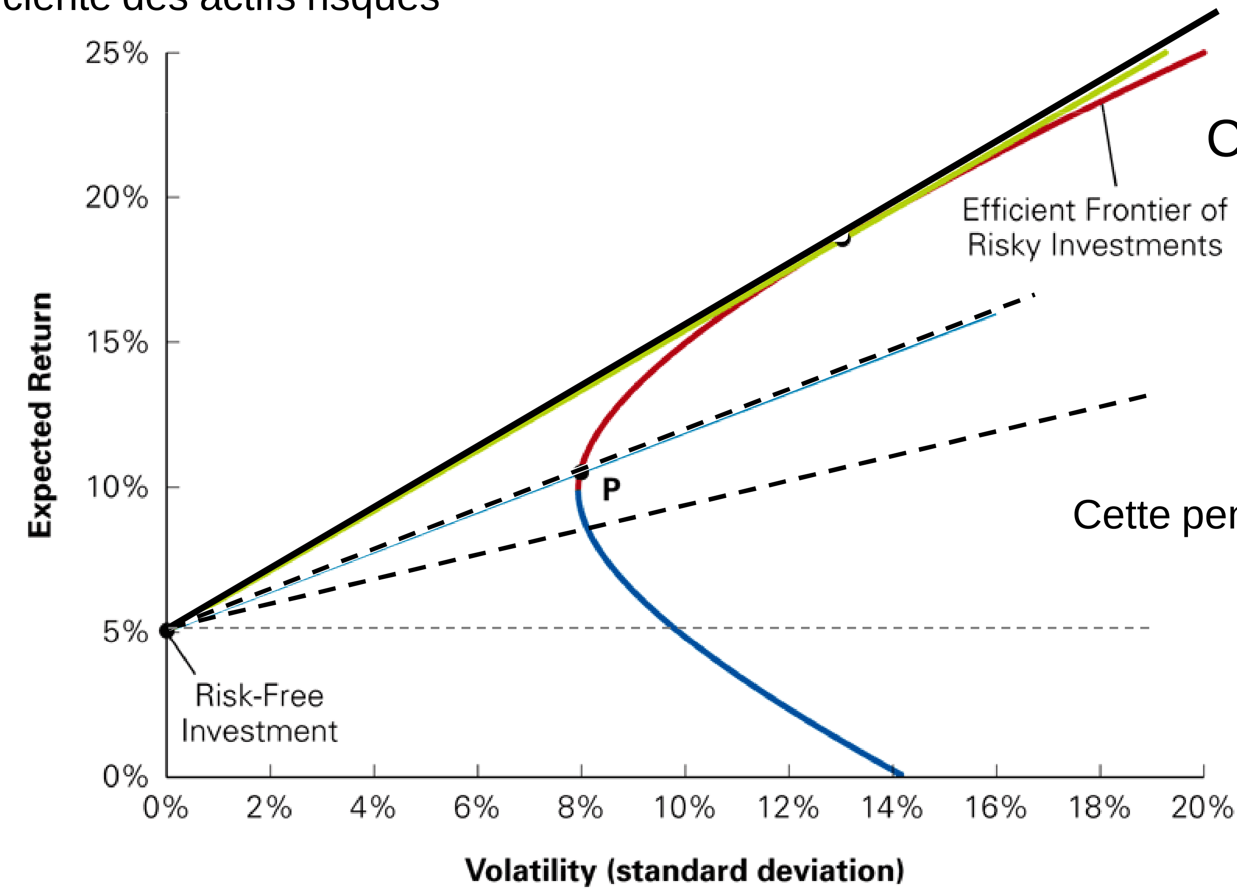
$$E[R_{xP}] = r_f + x.(E[R_P]-r_f)$$

Est ce que ce portefeuille est efficient?

Lorsque la part x est > à 100% ➨ L'investisseur emprunte des capitaux au taux d'intérêt sans risque pour investir dans P

L'identification du portefeuille super-efficient: le ratio de Sharpe

Pour un niveau de risque donné, l'investisseur cherchant à obtenir la rentabilité espérée la plus élevée possible doit chercher la droite la plus pentue combinant l'actif sans risque et un portefeuille appartenant à la frontière efficiente des actifs risqués



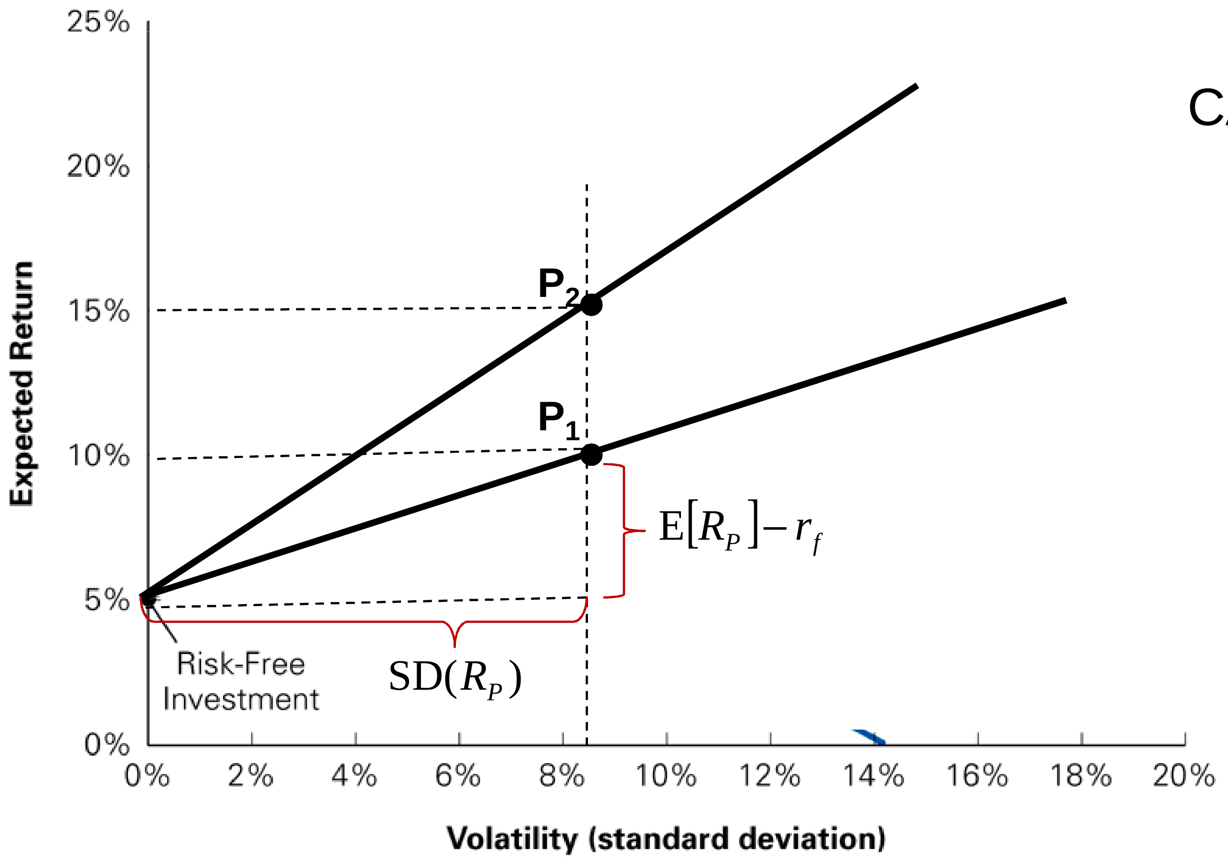
CAL —— $$E[R_{xP}] = r_f + \frac{(E[R_P] - r_f)}{SD(R_P)} . SD(R_{xP})$$

Cette pente correspond au **ratio de Sharpe**

$$\text{Ratio de Sharpe} = \frac{\text{Rentabilité excédentaire du portefeuille}}{\text{Volatilité du portefeuille}} \Rightarrow \text{Ratio de Sharpe} = \frac{\mathrm{E}[R_P] - r_f}{\mathrm{SD}(R_P)}$$

L'identification du portefeuille super-efficient: le ratio de Sharpe

Pour un niveau de risque donné, l'investisseur cherchant à obtenir la rentabilité espérée la plus élevée possible doit chercher la droite la plus pentue combinant l'actif sans risque et un portefeuille appartenant à la frontière efficiente des actifs risqués



CAL —— $E[R_{xP}]=r_f+\dfrac{(E[R_P]-r_f)}{SD(R_P)}.SD(R_{xP})$

The slope of this line is often referred to as the **Sharpe ratio** of the portfolio:

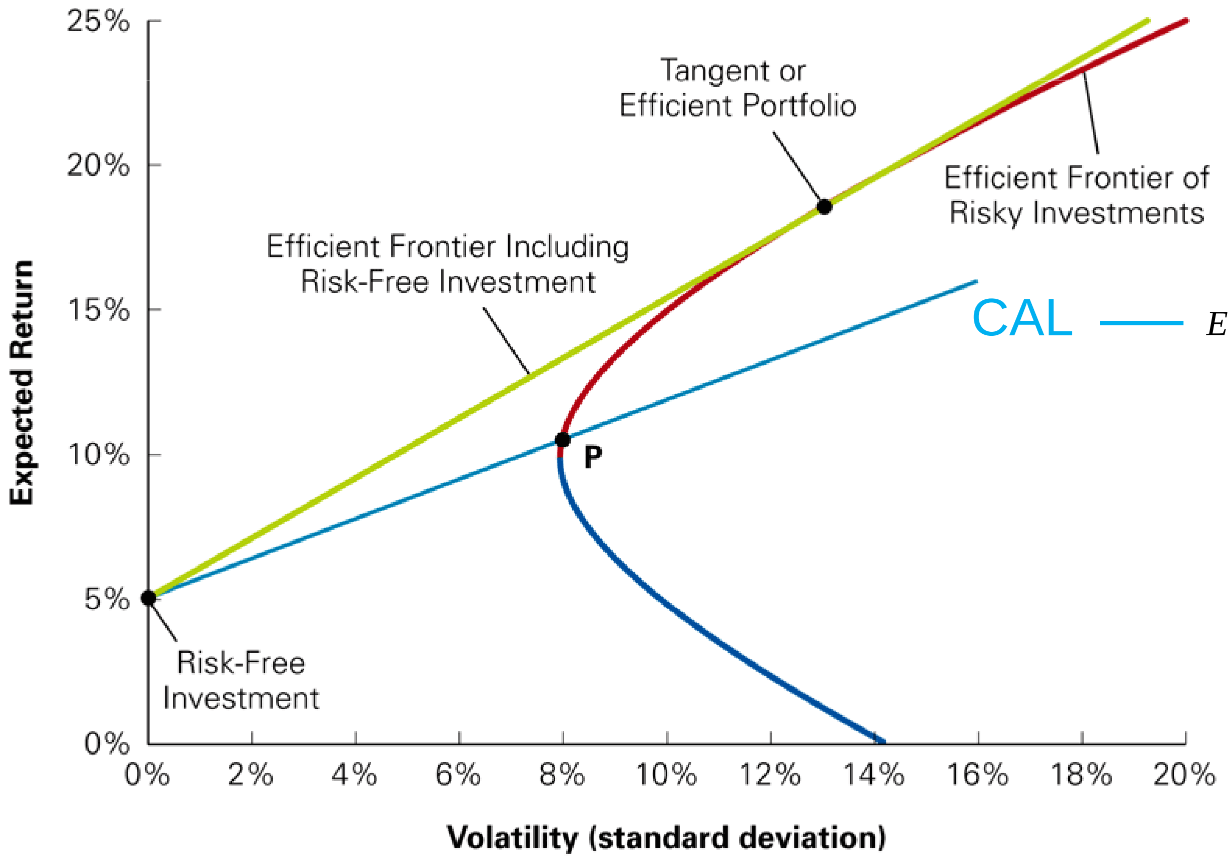
$$\text{Sharpe Ratio}=\frac{\text{Portfolio Excess Return}}{\text{Portfolio Volatility}}$$

$$\text{Sharpe Ratio}=\frac{E[R_P]-r_f}{SD(R_P)}$$

- Le ratio de Sharpe exprime la prime de risque offerte par le portefeuille pour une unité de risque additionnelle

L'identification du portefeuille super-efficient: le ratio de Sharpe

Le portefeuille super-efficient est celui qui appartient à la frontière efficiente des portefeuilles risqués et dont le ratio de Sharpe est maximal: le **portefeuille tangent**



CAL — $E[R_{xT}] = r_f + \frac{(E[R_T] - r_f)}{SD(R_T)} . SD(R_{xT})$

CAL — $E[R_{xP}] = r_f + \frac{(E[R_P] - r_f)}{SD(R_P)} . SD(R_{xP})$

➧ **Le portefeuille optimal = x.(le portefeuille de marché) + (1-x).(actif sans risque)**

x dépendra de l'aversion au risque de l'investisseur

L'identification du portefeuille super-efficient: le ratio de Sharpe

Combiné à un actif sans risque, le portefeuille super-efficient permet d'obtenir le meilleur arbitrage entre risque et rentabilité

Le portefeuille super-efficient est le seul portefeuille risqué efficient en présence d'un actif sans risque

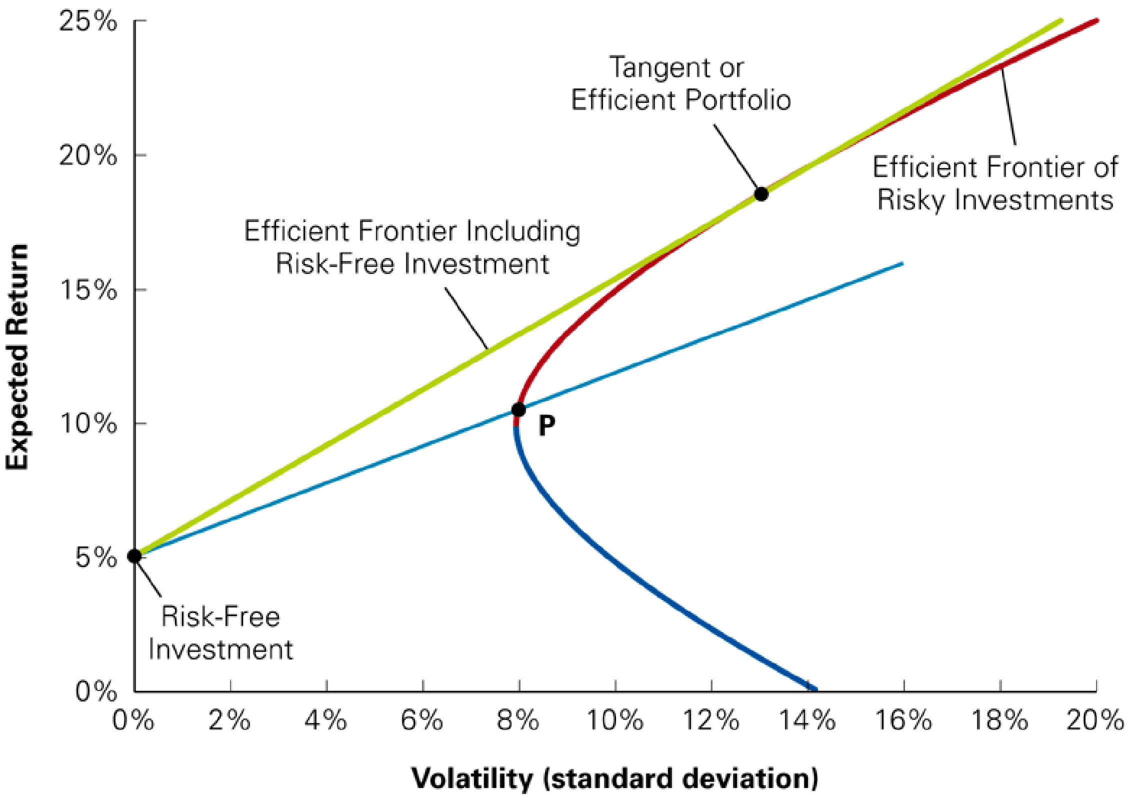
Le portefeuille super-efficient que doit choisir un investisseur ne dépend pas de son aversion pour le risque

- ➡ L'aversion pour le risque d'un investisseur détermine seulement la proportion de sa richesse investie dans le portefeuille super-efficient

L'identification du portefeuille super-efficient: application

Problem

Marie-Fatima souhaite avoir vos conseils. Elle dispose de 100 000€, investis dans un portefeuille P (voir graph.), avec une rentabilité espérée de 10.5% et une volatilité de 8%. Le taux sans risque est de 5%, le portefeuille super-efficient T a une espérance de rentabilité de 18.5% et une volatilité de 13.5%. **1.** Pour maximiser la rentabilité espérée sans augmenter le risque, quel portefeuille recommanderiez-vous?
2. Si Marie-Fatima préfère garder le même niveau de rentabilité espérée et souhaite réduire le risque, quel portefeuille recommanderiez vous? **3.** Enfin, elle vous demande de lui donner une idée de la rentabilité espérée pour un niveau de volatilité équivalent à 12%.



CAL —— $E[R_{xT}] = r_f + \dfrac{(E[R_T] - r_f)}{SD(R_T)}.SD(R_{xT})$

L'identification du portefeuille super-efficient: application

Solution Q.1

Solution Q.2

Solution Q.3

La théorie de choix de portefeuille

Harry Markowitz
Nobel Prize in 1990

« Portfolio Selection ». *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.

- Fundamentals of Portfolio Theory
- Developed techniques of mean-variance portfolio optimization, which allow an investor to find the portfolio with the highest expected return for any level of variance
- Markowitz's Approach has evolved into one of the main methods of portfolio optimization used on Wall Street

Plan du chapitre

1 Mesures de la rentabilité et du risque d'un portefeuille d'actions

Espérance de rentabilité d'un portefeuille
Combinaison des risques au sein d'un portefeuille
Variance, covariance et corrélation d'un portefeuille composé de deux titres
Variance d'un portefeuille composé de N titres

2 Choix optimal de portefeuille (Intro à la théorie de choix de portefeuille)

Portefeuilles efficients et courbe d'efficience : cas des portefeuilles de 2 titres
Portefeuille efficient
Prise en compte des ventes à découvert
Les portefeuilles efficients composés de N titres et la frontière d'efficience

3 Mesure du risque de marché (systématique)

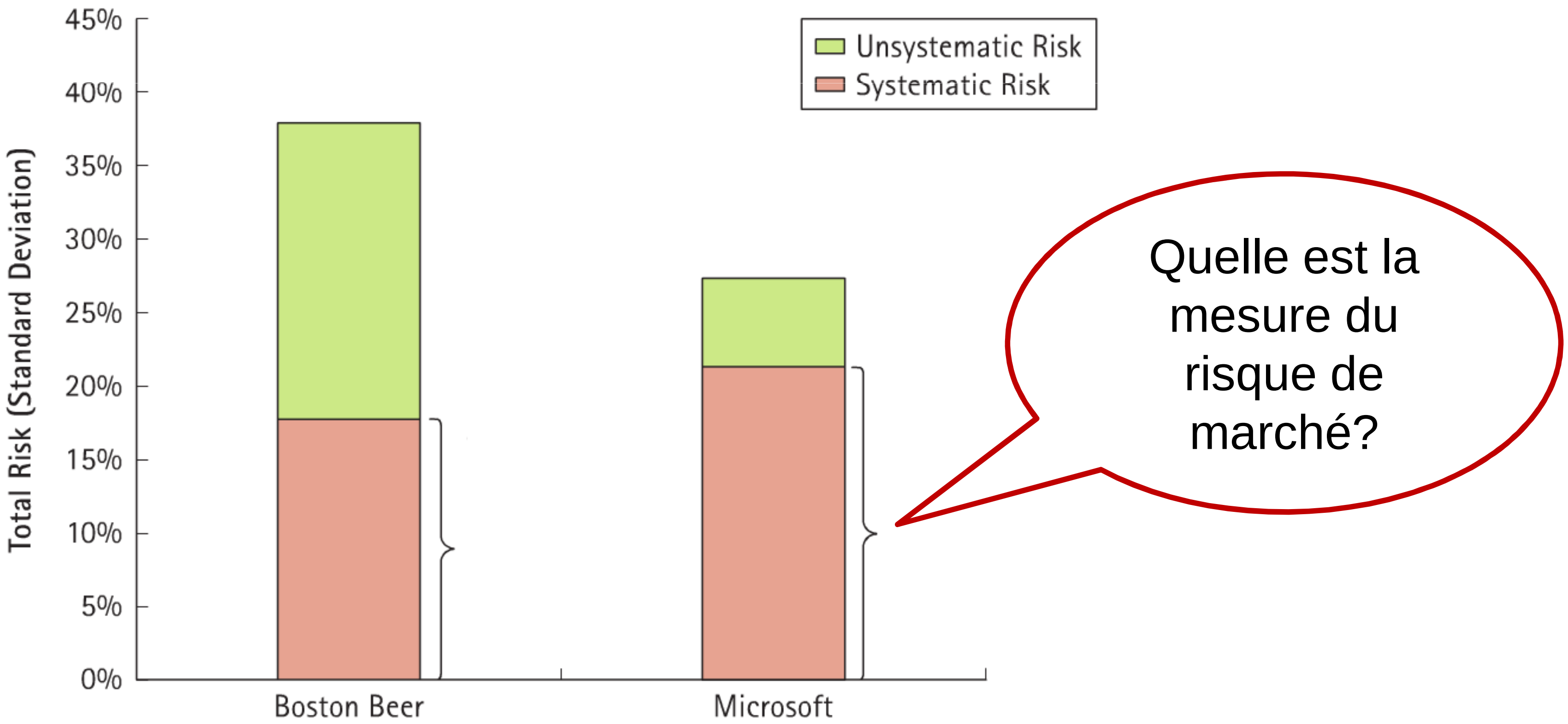
Portefeuille efficient et le portefeuille de marché
Le Bêta (β) : une mesure du risque de marché
Les méthodes de calcul du Bêta
Le Bêta en pratique

4 Introduction au MEDAF (CAPM)

La relation risque - rentabilité espérée – prime de risque
La droite de marché
Le MEDAF et le portefeuille d'actions
Le MEDAF en pratique

Rappel: l'Ecart-Type est la Mesure du Risque Total d'une action

Risque total d'une action = Risque diversifiable + risque systématique



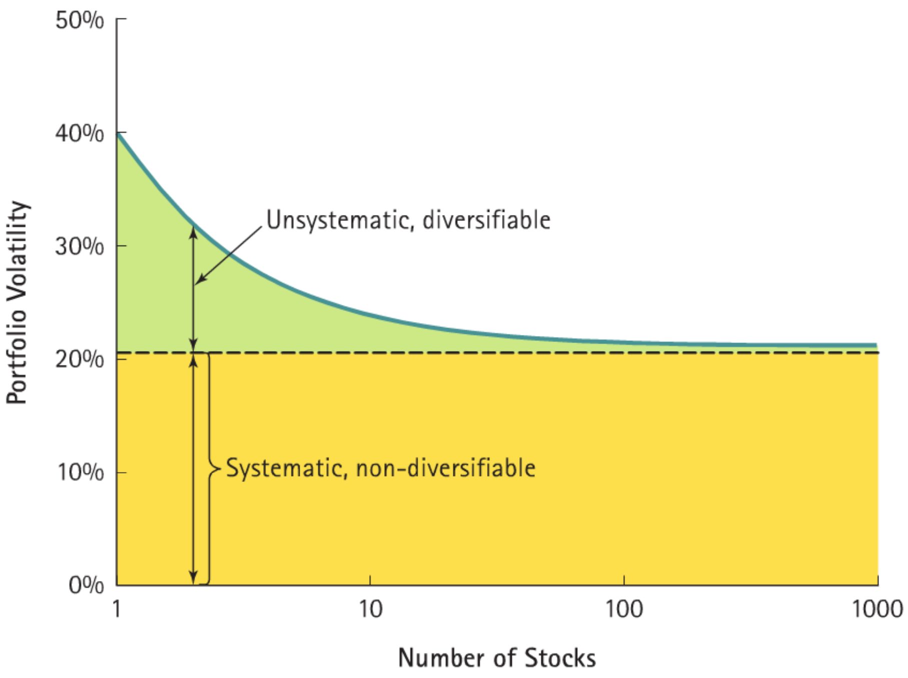
Rappel:

En **AOA**,

les investisseurs peuvent éliminer le risque spécifique « gratuitement » grâce à la diversification

En revanche, la diversification ne réduit pas l’exposition d’un Portefeuille au risque systématique

No. Stocks	Portfolio Volatility
1	40.0%
2	32.0%
3	28.8%
4	27.1%
5	26.0%
10	23.7%
15	22.9%
20	22.5%
25	22.2%
30	22.1%
50	21.7%
100	21.5%
1000	21.2%



- **La prime de risque d’une action est déterminée par son risque de marché et ne dépend pas de son risque spécifique**

Identifier le risque de marché à l'aide d'un portefeuille diversifié

Mesure du risque = mesure de la variabilité des rentabilités

- Mesure du risque systématique = identifier la part de la variabilité qui est due au risque systématique

  = évaluer la sensibilité de l'action aux chocs systématiques

- Pour ce faire, il faut observer comment réagit la rentabilité de l'action par rapport à la variation de la rentabilité d'un portefeuille exclusivement exposé au risque de marché

Le portefeuille qui bénéficie d'une **diversification maximale**

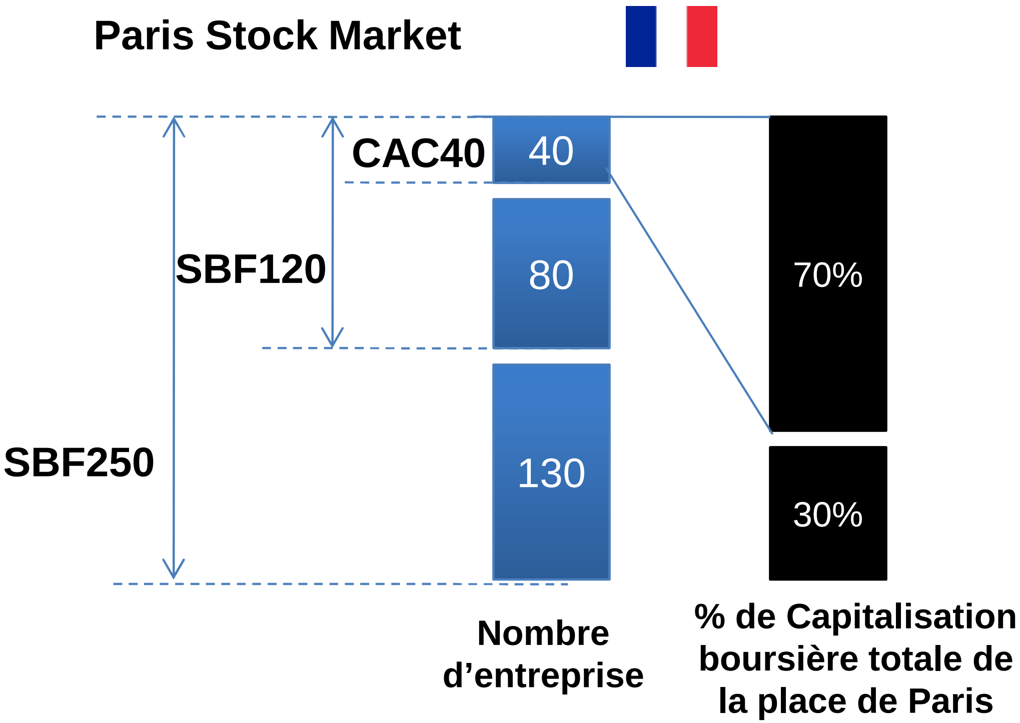
Contient le plus grand nombre des actions disponibles sur le marché

.....

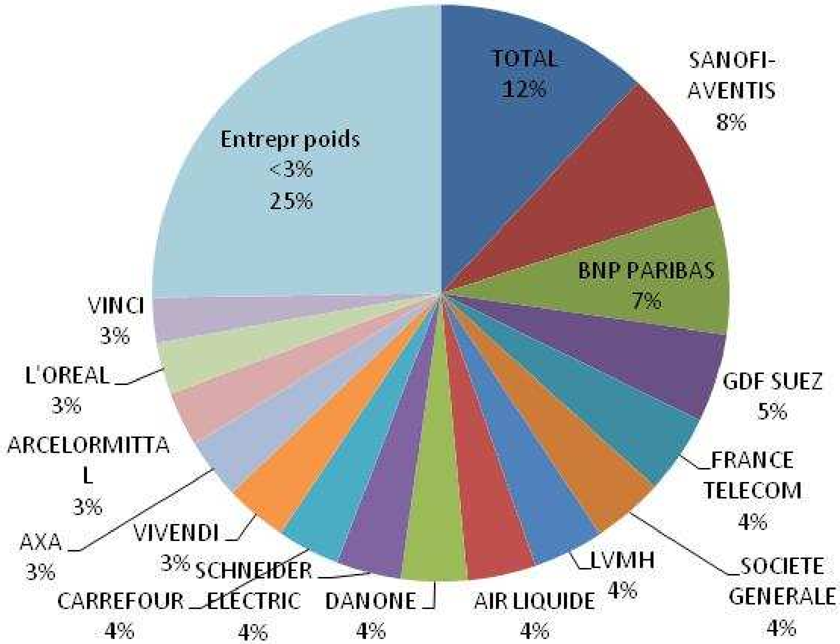
- En pratique, investir dans le CAC40 ou le S&P500 constitue une approximation du portefeuille de marché

Comment investir dans le portefeuille de marché?

Sur le marché boursier, il existe des **indices boursiers** qui représentent les performances du marché des actions



Les pondérations des principales entreprises du CAC40



Le CAC40 est considéré comme un indice qui réplique assez fidèlement le portefeuille de marché

Pour investir dans un portefeuille de marché : il faut acheter des ***trakers*** (titres représentant un portefeuille d'actifs –indice bouriser- qui s'échangent sur le marché comme n'importe quel autre titre). Ex. le Lyxor ETF CAC40, SPDR (S&P Depository Receipts, nick-named "Spiders"), etc.

Comment investir dans le portefeuille de marché?

Construire un portefeuille de marché

Le poids de chaque titre i dans le P_M doit être proportionnel à sa **capitalisation boursière (*V*)**

$$MV_i = (\text{Number of Shares of } i \text{ Outstanding}) \times (\text{Price of } i \text{ per Share}) = N_i \times P_i$$

Exemple : capitalisation boursière d'EDF (Number of shares = 1.8 billion ; Stock price=17€)

MV(EDF) =

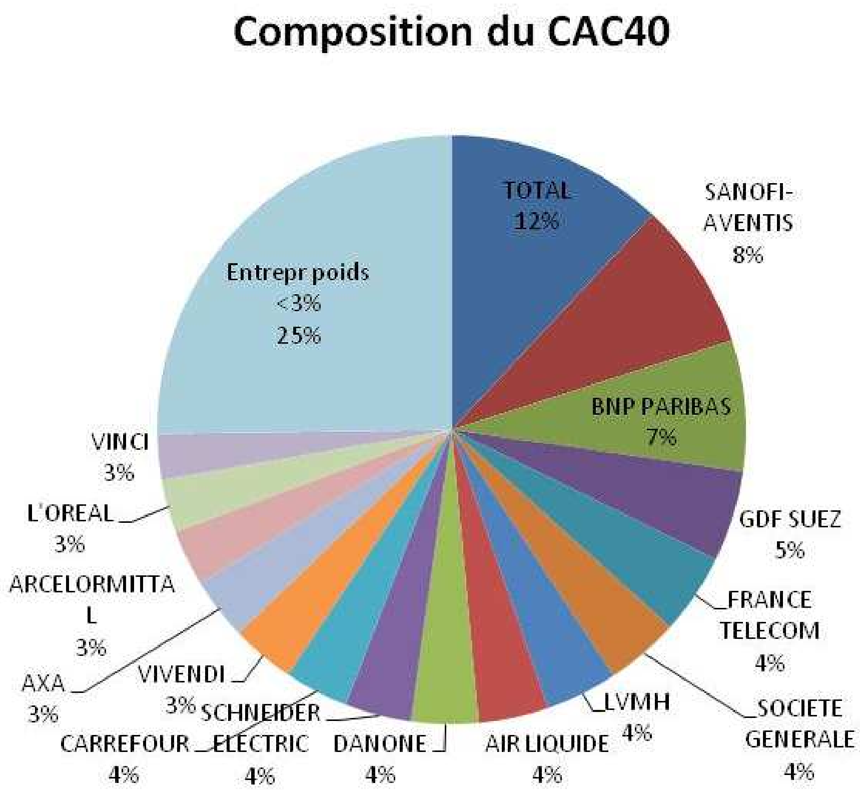
Pondération par la capitalisation boursière

$$x_i = \frac{\text{Market Value of } i}{\text{Total Market Value of All Securities}} = \frac{MV_i}{\sum_j MV_j}$$

Comment investir dans le portefeuille de marché?

Investir 20 000€ pour constituer un portefeuille de marché

Si le portefeuille du marché est représenté par un fonds indiciel qui réplique l'évolution du CAC40, quelle est la composition de votre portefeuille ?

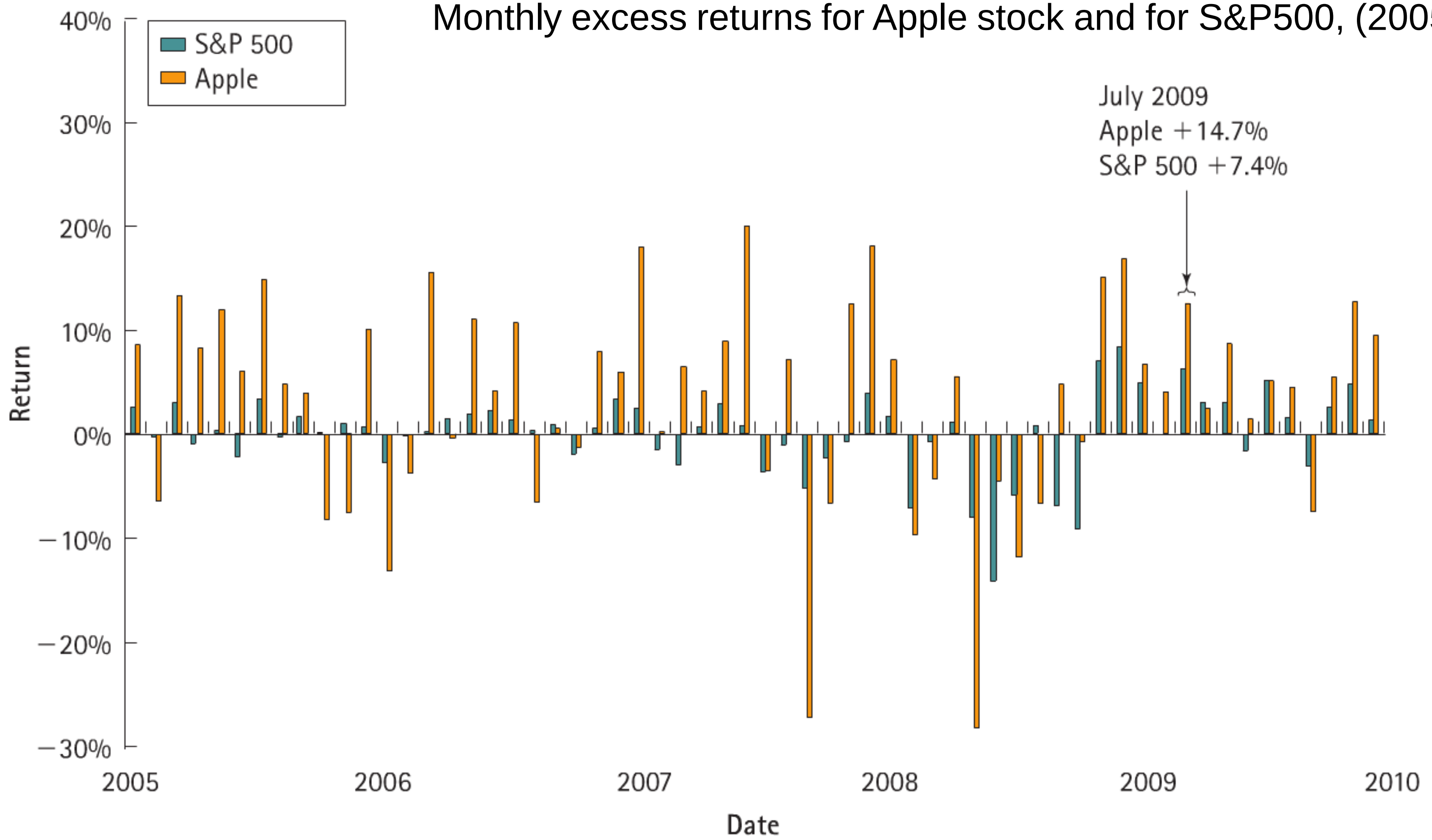


Le portefeuille de marché est une bonne proxy pour le risque de marché

Si la rentabilité d'une action est sensible aux variations de la rentabilité du portefeuille de marché, alors cette action est sensible au risque de marché

- c.a.d. Lorsque des événements systématiques affectent l'ensemble du marché, ils affectent également cette action

Monthly excess returns for Apple stock and for S&P500, (2005-2010)



Le Beta

Si la rentabilité d'une action est sensible aux variations de la rentabilité du portefeuille de marché, alors cette action est sensible au risque de marché

- c.a.d. Lorsque des événements systématiques affectent l'ensemble du marché, ils affectent également cette action
- Mesurer cette sensibilité = mesurer le risque de marché

Le Beta

Le β est le pourcentage de variation de la rentabilité excédentaire d'un actif lorsque la rentabilité excédentaire du portefeuille de marché varie de 1%

Ex. L'action Capgemini a un β = 2.16 :

- Si la rentabilité excédentaire du portefeuille de marché (CAC40) augmente de 1%, la rentabilité excédentaire de Capgemini aura tendance à augmenter en moyenne de 2.16 x 1% = 2.16%
- Autrement dit , l'action Capgemini est exposée à deux fois plus de risque systématique que le CAC40

Le Beta

Tableau 10.5 - Exemples de bêtas calculés à partir de données historiques fournis par Euronext

Entreprises	Code (*ticker*)	Bêta	Entreprises	Code (*ticker*)	Bêta
Accor	AC.PA	1,13	L'Oréal	OR.PA	0,95
Air France-KLM	AF.PA	1,99	LVMH	MC.PA	1,12
Air Liquide	AI.PA	0,55	Michelin	ML.PA	0,21
Alcatel-Lucent	ALU.PA	2,76	Pernod Ricard	RI.PA	0,98
Alstom	ALO.PA	2,43	Peugeot	UG.PA	1,69
Arcelor-Mittal	MTP.PA	1,95	PPR	PP.PA	1,13
AXA	CS.PA	– 0,03	Renault	RNO.PA	1,31
BNP Paribas	BNP.PA	1,14	Saint-Gobain	SGO.PA	0,96
Bouygues	EN.PA	0,91	Sanofi-Aventis	SAN.PA	0,49
Capgemini	CAP.PA	2,16	Schneider Electric	SU.PA	0,66
Carrefour	CA.PA	0,69	Société Générale	GLE.PA	1,25
Crédit Agricole	ACA.PA	0,53	STMicroelectronics	STM.PA	1,78
Danone	BN.PA	0,59	Suez	SZE.PA	1,47
Dexia	DX.PA	1,26	Total	FP.PA	0,54
EADS	EAD.PA	1,36	Unibail-Rodamco	UL.PA	0,37
Essilor	EF.PA	0,22	Vallourec	VK.PA	1,10
France Télécom	FTE.PA	1,61	Véolia Environnement	VIE.PA	1,23
Lafarge	LG.PA	0,85	Vinci	DG.PA	0,38
Lagardère	MMB.PA	1,04	Vivendi	VIV.PA	1,40

Lorsque la rentabilité excédentaire du marché progresse de 1% (conjoncture économique favorable), l'action **Air France** connaît en moyenne une hausse deux fois plus grande (1.99%) que la moyenne du marché, et réciproquement durant les périodes de récession

Le Beta versus l'Ecart-Type

La volatilité et le bêta sont deux mesures du risque, mais ils diffèrent quant à la nature du risque mesuré

La volatilité : σ

Risque systématique + risque spécifique d'un actif

Le bêta : β

Risque systématique d'un actif

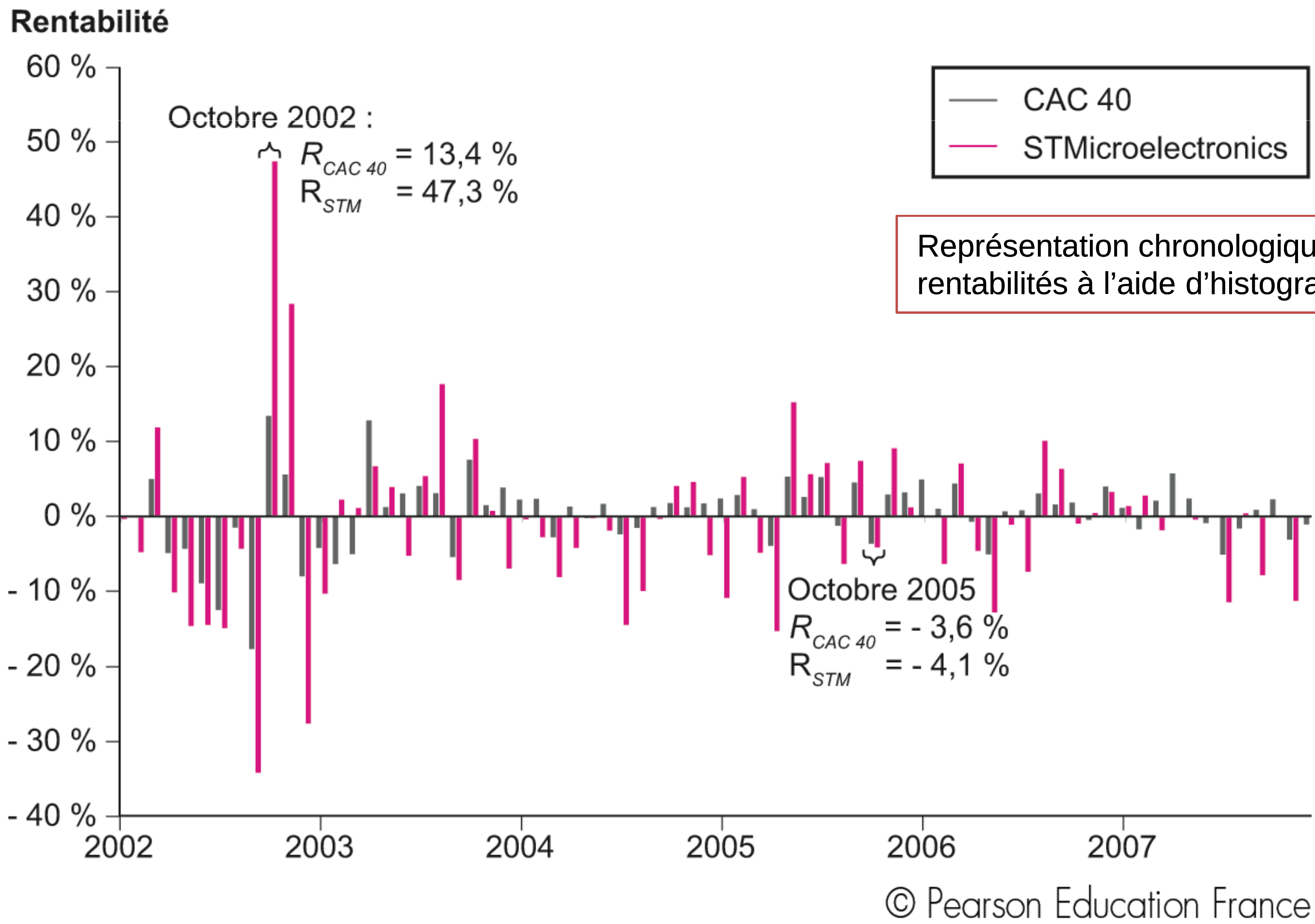
Exemple : AXA et Air France ont des volatilités proches sur la période 2002-2007 (σ ~ 45% par an), mais le bêta d'Air France est beaucoup plus élevé que celui d'AXA. Explication ?

Entreprises	σ	β
Air France-KLM	45%	1.99
AXA	45%	-0.03

tableau **10.5** (B&DM p.324)

Estimation du bêta à partir de données historiques

Fig12.6 (B&DM-p.404) : Rentabilités mensuelles de STMicroelectronics et du CAC40 sur 2002-2007

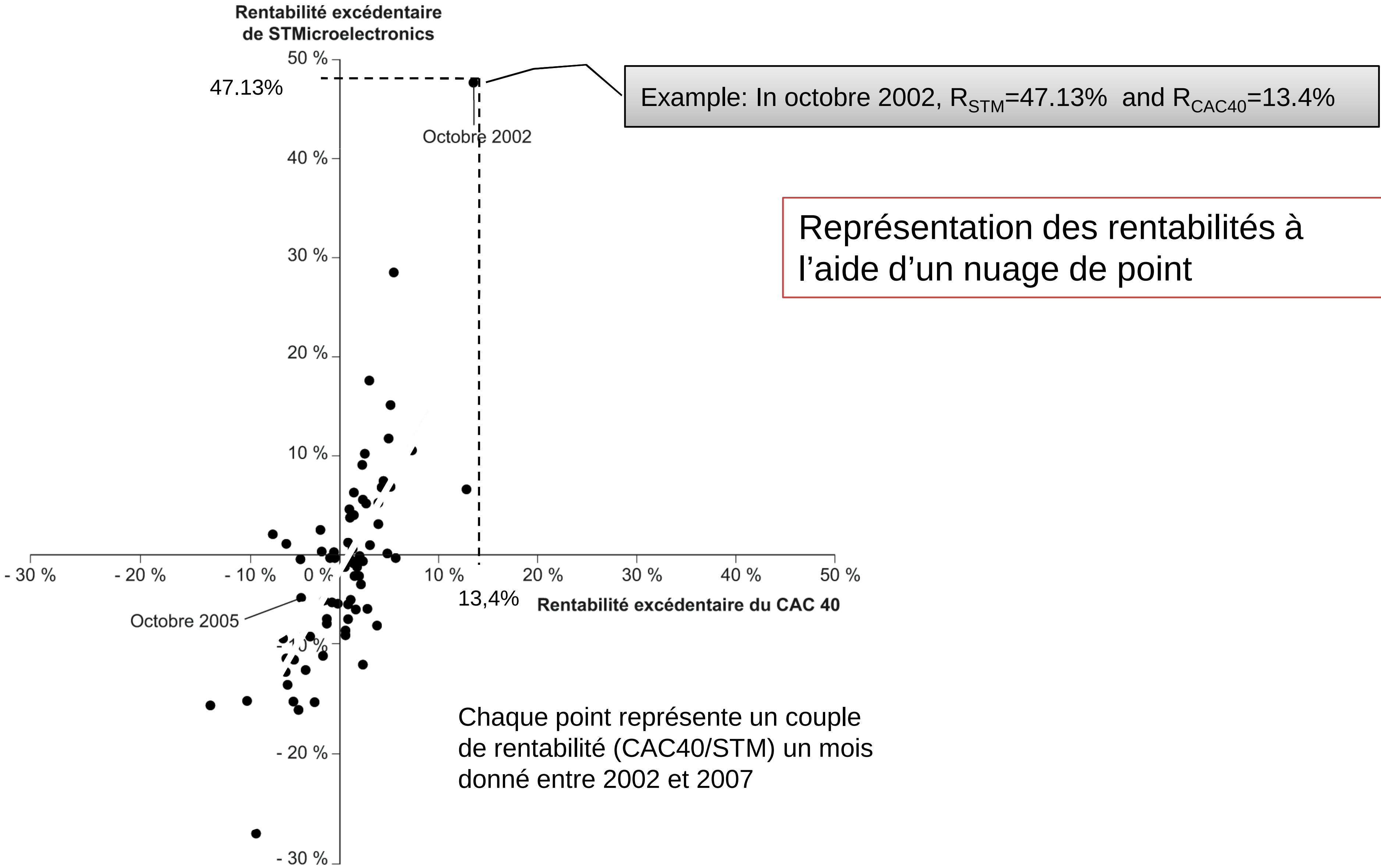


Représentation chronologique des rentabilités à l'aide d'histogrammes

- Les rentabilités de STM tendent à varier dans le même sens que le marché (CAC40), en amplifiant les variations de celui-ci

Estimation du bêta à partir de données historiques

Fig12.6 (B&DM-p.404) : Graphique en nuage de points des rentabilités mensuelles de STMicroelectronics et du CAC40 sur 2002-2007

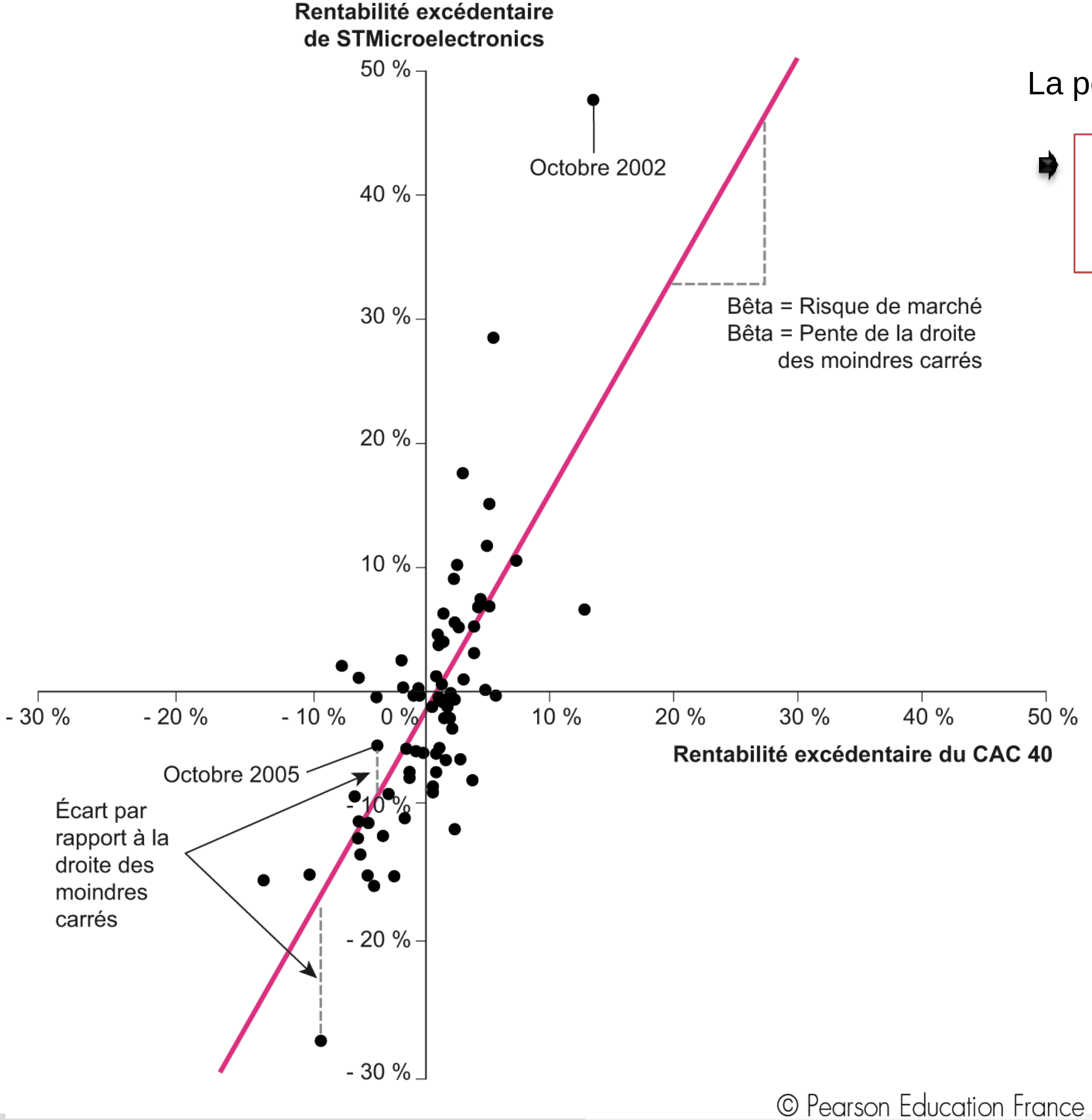


Représentation des rentabilités à l'aide d'un nuage de point

Chaque point représente un couple de rentabilité (CAC40/STM) un mois donné entre 2002 et 2007

Estimation du bêta à partir de données historiques

Fig12.6 (B&DM-p.404) : Graphique en nuage de points des rentabilités mensuelles de STMicroelectronics et du CAC40 sur 2002-2007



La pente de la droite de régression = **1.8 = Beta**

En moyenne, une hausse de 10% de la rentabilité du marché implique une hausse de la rentabilité de STM de 18%

Exemples de bêta à partir de données historiques

Les bêtas des entreprises européennes calculés à partir de données historiques

$\beta < 0{,}75$		$0{,}75 < \beta < 0{,}85$		$0{,}85 < \beta < 1$		$1 < \beta < 1{,}1$		$\beta \geq 1{,}1$	
Haldengut	-0,13	Benetton	0,76	Rhone Poulenc	1,00	Henkel	1,01	Paribas	1,10
Immobilière Hôtelière	0,24	EMI	0,77	UBS	1,00	Peugeot	1,02	Michelin	1,10
Fromageries Bel	0,36	Air Liquide	0,77	Hoechst	0,99	Lufthansa	1,02	Novartis	1,10
Seita	0,40	Total	0,77	Adecco	0,99	Bayer	1,02	Bank of Scotland	1,11
Eramet	0,45	Club Méditerranée	0,78	Ahold	0,98	BASF	1,02	Credito Italiano	1,11
Hermes	0,49	Elsevier	0,78	Petrofina	0,97	Siemens	1,02	Allianz	1,11
Eurodisney	0,49	British Telecom	0,78	Unilever	0,96	Tabacalera	1,02	Banco Santander	1,11
TF 1	0,54	Reuters	0,78	Preussag	0,96	Vivendi	1,03	Lagardère Groupe	1,15
Skis Rossignol	0,54	Swiss Life	0,78	AXA	0,96	Vodafone	1,03	Volkswagen	1,17
AGF	0,60	Zodiac	0,79	Saint-Gobain	0,96	Deutsche Bank	1,04	BMW	1,17
Eurotunnel	0,64	GIB	0,80	Danone	0,96	Accor	1,04	Telefonica	1,18
Rémy Cointreau	0,65	Generali	0,80	Fiat	0,94	Pinault Printemps	1,05	Legrand	1,19
Canal +	0,66	Clarins	0,81	Nestlé	0,94	Parmalat	1,05	Telecom Italia	1,23
Heineken	0,66	Aguas Barcelona	0,81	Reckitt & Colman	0,93	Italgas	1,06	Pirelli	1,23
Karstadt	0,68	Rolls-Royce	0,82	Abbey National	0,92	Barclays	1,07	Daimler-Benz	1,28
Tesco	0,73	Bouygues	0,83	British Airways	0,89	Société Générale	1,07	Renault	1,30
Marks & Spencer	0,73	Pernod-Ricard	0,83	Veba	0,89	Lafarge	1,07	Dragados	1,31
British Petroleum	0,73	Glaxo Wellcome	0,85	LVMH	0,88	BNP	1,07	Mannesmann	1,33
PolyGram	0,74	SAP	0,85	Elf Aquitaine	0,87	L'Oréal	1,08	Philips	1,33
Castorama	0,74	Shell	0,85	Carrefour	0,87	Cable & Wireless	1,08	Alcatel Alsthom	1,39
Bull	0,75	KLM	0,85	Cadbury Schweppes	0,87	Olivetti	1,09	Schneider	1,44

source : Datastream

Exemples de bêta à partir de données historiques

Average Betas for stocks by industry and the betas of slected company in each industry (based on historical data)

Industry	Average Beta	Ticker	Company	Beta
Electric Utilities	0.2	EIX	Edison International	0.8
Personal & Household Prods.	0.5	PG	The Procter & Gamble Company	0.6
Food Processing	0.5	HNZ	H. J. Heinz Company	0.6
Restaurants	0.5	SBUX	Starbucks Corporation	1.3
Beverages (Nonalcoholic)	0.6	KO	The Coca-Cola Company	0.6
Retail (Grocery)	0.6	SWY	Safeway Inc.	0.7
Major Drugs	0.7	PFE	Pfizer Inc.	0.7
Beverages (Alcoholic)	0.7	SAM	Boston Beer Company Inc.	0.8
Apparel/Accessories	0.7	ANF	Abercrombie & Fitch	1.6
Retail (Home Improvement)	0.8	HD	Home Depot Inc.	0.7
Software & Programming	0.8	MSFT	Microsoft Corporation	1.0
Recreational Products	1.0	HOG	Harley-Davidson Inc.	2.2
Auto & Truck Manufacturers	1.0	F	Ford Motor Company	2.5
Communications Equipment	1.0	MOT	Motorola	1.7
Forestry & Wood Products	1.0	WY	Weyerhaeuser Company	1.5
Computer Services	1.1	GOOG	Google	1.1
Computer Hardware	1.2	AAPL	Apple	1.5
Conglomerates	1.4	GE	General Electric Company	1.6
Semiconductors	1.5	INTC	Intel Corporation	1.1

Source: Reuters, June 2010.

Estimation du bêta à partir de la covariance

Si le **Portefeuille de marché est composé des actions du CAC40** et le bêta de l'action i est $\boldsymbol{\beta_i = 1.5}$

- une augmentation de 1% de la rentabilité excédentaire du CAC40, induit une augmentation de 1.5% de la rentabilité excédentaire de l'action i.

- $$\beta_i = \frac{1.5\%}{1\%} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad}$$

- $$\boxed{\beta_i = \frac{Cov\,(R_i\ ,R_{Mkt})}{[SD\,(R_{Mkt})]^2}}$$

$$Corr(R_i, R_j) = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_{R_i} . \sigma_{R_j}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta_i = \frac{\overbrace{SD\,(R_i)\,.\,Corr\,(R_i\ ,R_{Mkt})}^{\text{Part de la volatilité de l'actif i qui est commune à celle du portefeuille du marché}}}{SD\,(R_{Mkt})}}$$

Interprétation du bêta

Le β mesure la sensibilité de la rentabilité d'une action i aux évolutions des conditions de marché

If $\boldsymbol{\beta_i}$ **=1** ➡ La rentabilité du titre i a tendance à évoluer dans le même sens que celle du marché

If $\boldsymbol{\beta_i}$ **>1** ➡ La rentabilité du titre I a tendance à être plus sensible au risque systématique que le portefeuille de marché

Les évenements macroéconomiques auront un impact amplifié (négativement ou positivement) sur l'action i

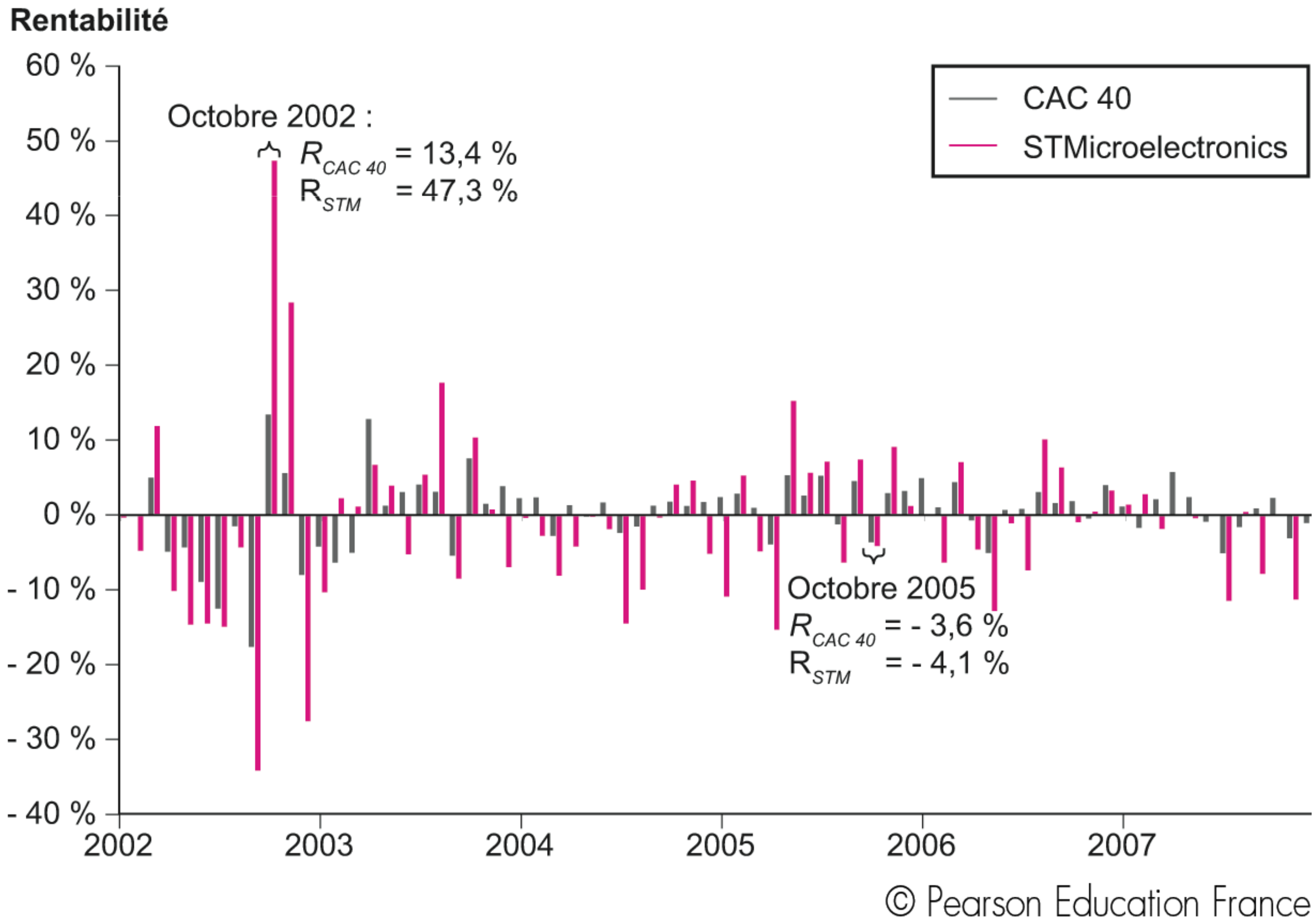
If $\boldsymbol{\beta_i}$ **<1** ➡ La rentabilité du titre a tendance à être plus stable et moins sensible au risque systématique que le portefeuille de marché

L'impact des chocs économiques sur le titre i sont amorties

If $\boldsymbol{\beta_i}$ **<0** ➡ Lorsque le marché s'effondre, la rentabilité du titre i a tendance à augmenter

Interprétation du bêta

Fig12.6 (B&DM-p.404) : Rentabilités mensuelles de STMicroelectronics et du CAC40 sur 2002-2007



Les rentabilités de STM tendent à varier dans le même sens que le marché (CAC40), en amplifiant les variations de celui-ci

- Théoriquement, le β doit être >1 ou <1 ?

L'estimation du bêta est-elle fiable ?

L'horizon temporel : arbitrage entre peu et trop de données historiques

L'indice représentant le portefeuille de marché : quel indice choisir ?

L'erreur d'estimation

Le recours à des bêtas sectoriels jugés plus fiable => **bêta ajusté**

$$\Rightarrow \quad \text{Adjusted Beta of Security } i = \frac{2}{3}\beta_i + \frac{1}{3}(1.0)$$

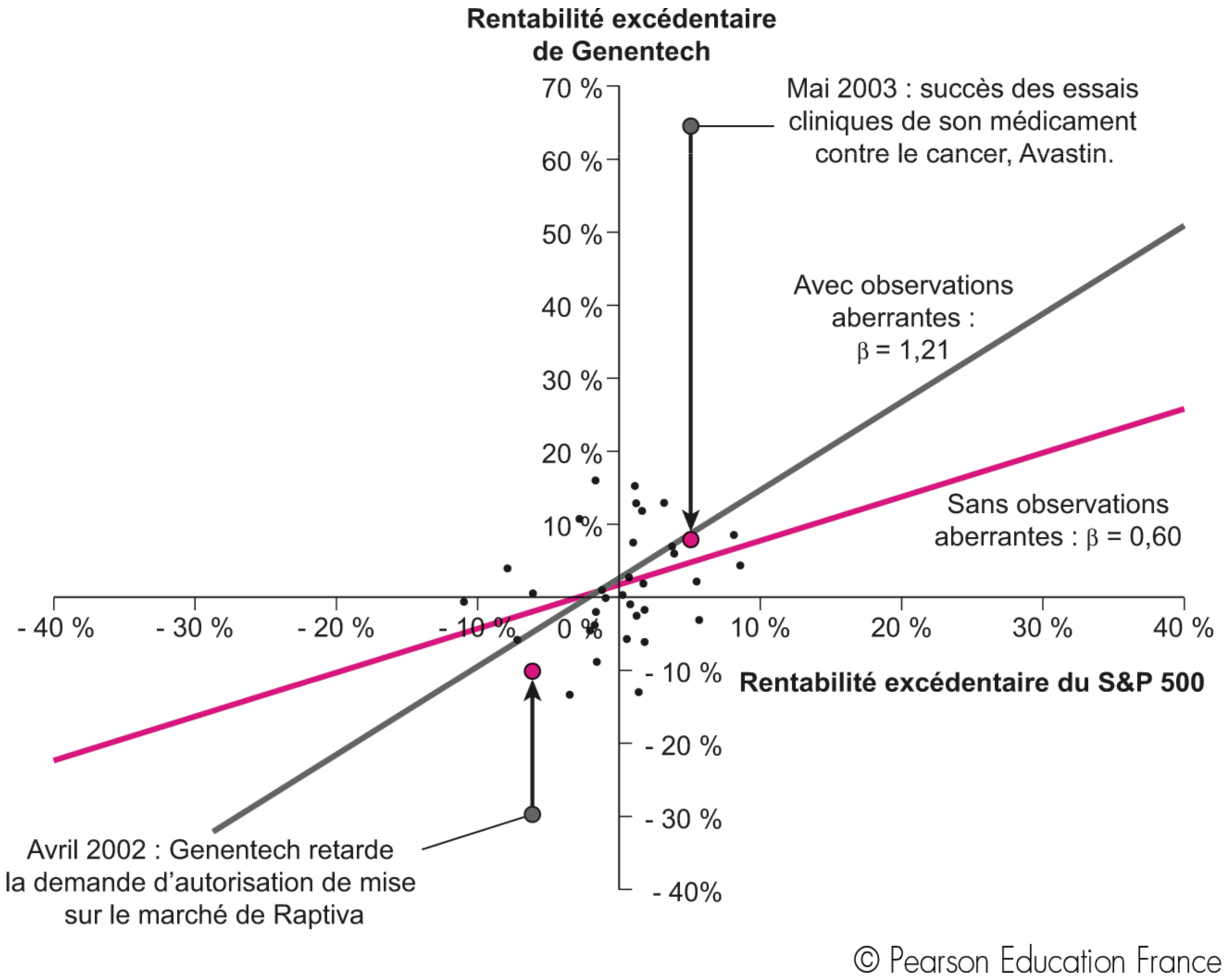
Estimation Methodologies Used by Selected Data Providers

	Value Line	Reuters	Bloomberg	Yahoo!	Capital IQ
Returns	Weekly	Monthly	Weekly	Monthly	Weekly, Monthly (5yr)
Horizon	5 years	5 years	2 years	3 years	1, 2, 5 years
Market Index	NYSE Composite	S&P 500	S&P 500	S&P 500	S&P 500 (U.S. Stocks) MSCI (International Stocks)
Adjusted	Adjusted	Unadjusted	Both	Unadjusted	Unadjusted

Le traitement des observations aberrantes (rentabilités de magnitude exceptionnellement importante)

L'estimation du bêta est-elle fiable ?

Fig12.10 (B&DM-p.414) : Estimation du bêta de DNA selon que les observations aberrantes sont, ou non, prises en compte



➡ L'évaluation du bêta d'un titre est plus un art qu'une science

L'estimation du bêta est-elle fiable ?

	Bloomberg	Fininfo	Reuters
Rentabilités	Hebdomadaires	Quotidiennes	Mensuelles
Horizon	2 années	1 semaine à 10 années	5 années
Indice de marché	CAC 40	CAC 40*	CAC 40**
Ajusté	Oui	Non	Non

* Choix par défaut, mais l'utilisateur peut sélectionner d'autres indices de référence.

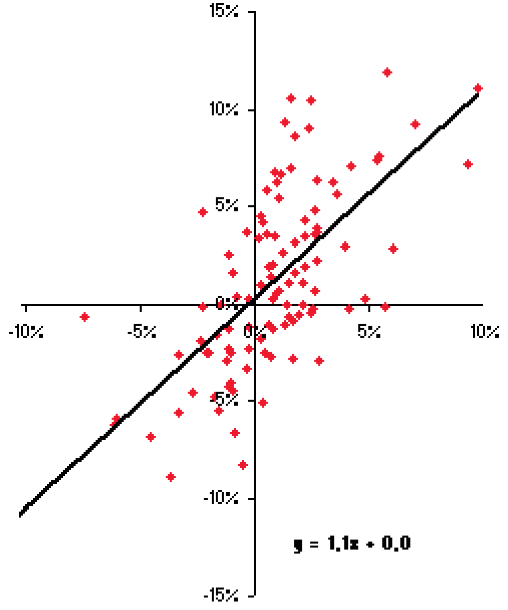
** Indice auquel l'entreprise appartient. Par exemple, SBF 250 si l'entreprise appartient à cet indice sans appartenir au CAC 40 ou au SBF 120.

➡ Des fournisseurs d'informations financières différents et des méthodes d'évaluation différentes

L'estimation du bêta est-elle fiable ?

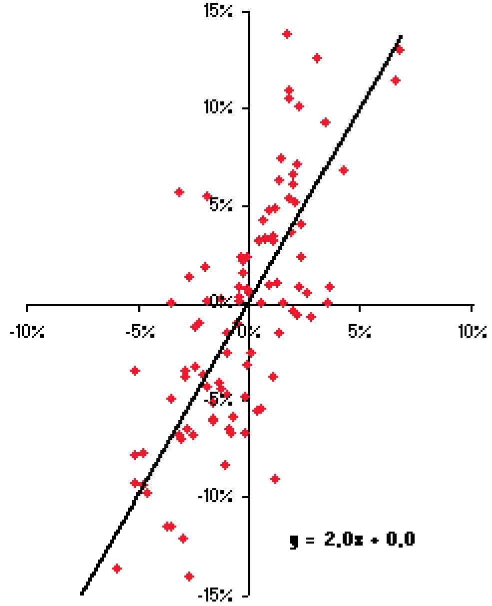
L'exemple de **Bouygues** : impact de l'évolution des activités sur le Béta

1986
De la construction à maturité et moyennement risquée…



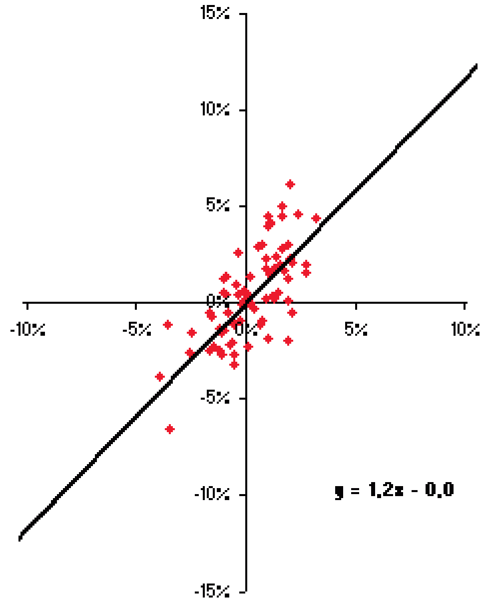
β = 1,1

2001
… aux médias télécoms en plein boom et fortement risqués…



β = 2,0

2005
… et retour à la maturité.



β = 1,2

Source: Datastream

Plan du chapitre

1 Mesures de la rentabilité et du risque d'un portefeuille d'actions

Espérance de rentabilité d'un portefeuille
Combinaison des risques au sein d'un portefeuille
Variance, covariance et corrélation d'un portefeuille composé de deux titres
Variance d'un portefeuille composé de N titres

2 Choix optimal de portefeuille (Intro à la théorie de choix de portefeuille)

Portefeuilles efficients et courbe d'efficience : cas des portefeuilles de 2 titres
Portefeuille efficient
Prise en compte des ventes à découvert
Les portefeuilles efficients composés de N titres et la frontière d'efficience

3 Mesure du risque de marché (systématique)

Portefeuille efficient et le portefeuille de marché
Le Bêta (β) : une mesure du risque de marché
Les méthodes de calcul du Bêta
Le Bêta en pratique

4 Introduction au MEDAF (CAPM)

La relation risque - rentabilité espérée – prime de risque
La droite de marché
Le MEDAF et le portefeuille d'actions
Le MEDAF en pratique

Le MEDAF: objectif

Estimer le coût des capitaux propres d'un projet d'investissement en utilisant son Beta

William F. Sharpe
Nobel prize 1990

« Capital Asset Prices. A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk ».
The Journal of Finance, Vol. 19, No. 3, (1964), pp. 425-442 .

Les 3 hypothèses du MEDAF

Hypothèse 1

On suppose que les coûts de transactions et les impôts sont nuls

- Les investisseurs peuvent acheter ou vendre n'importe quel actif financier à son prix de marché (sans supporter de coûts de transactions ni d'impôts) et prêter ou emprunter au taux d'intérêt sans risque

Hypothèse 2

Tous les investisseurs ont pour objectif de détenir un portefeuille efficient (rationalité des acteurs)

- C'est-à-dire un portefeuille offrant la rentabilité espérée la plus élevée pour un risque donné

Hypothèse 3

Hypothèse des anticipations homogènes des investisseurs

- Les investisseurs forment des anticipations homogènes sur les rentabilités espérées, les volatilités et les corrélations de tous les actifs financiers

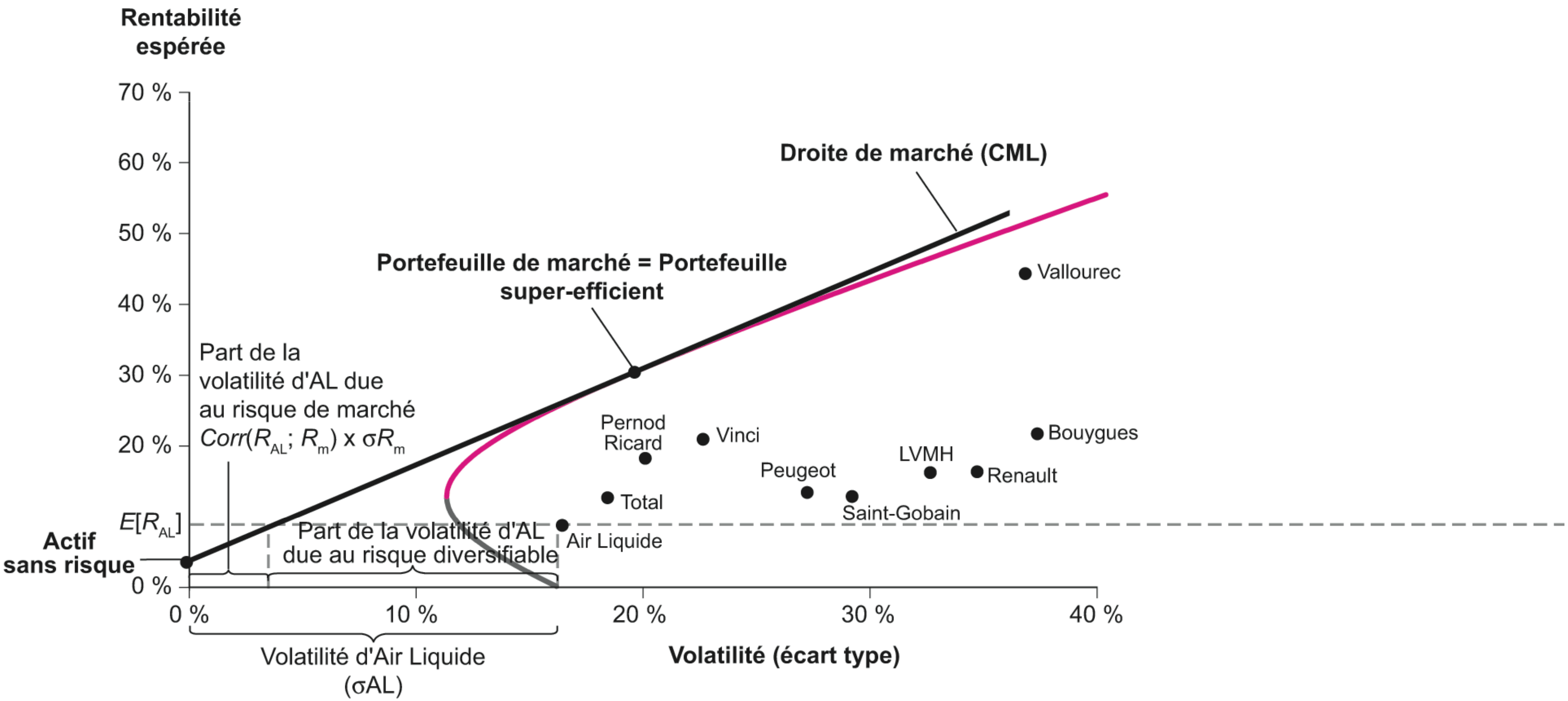
Principale impliquation du MEDAF:

- Selon le MEDAF: **le portefeuille super-efficient est le portefeuille de marché**

$$P_{eff} = P_{Mkt}$$

La droite de marché (The Capital Market Line)

Selon le MEDAF: **le portefeuille super-efficient est le portefeuille de marché**



- La droite de marché représente les portefeuilles dont la rentabilité espérée est la plus élevée pour une volatilité donnée

La rentabilité espérée d'un actif à partir du bêta

$$E[R_i] = r_f + (\text{Prime de risque de } i\,) \qquad (1)$$

Si les hypothèses des marchés efficients sont vérifiées:

- La prime de risque dépend uniquement du risque de marché
- La prime de risque d'un titre i est proportionnelle à la prime de risque de marché

$$\text{Prime de risque de } i = \beta.\,\text{Prime de risque du } P_{\text{Mkt}} \qquad (2)$$

(1) (2) $\Rightarrow \; E[R_i] = r_f + \beta\,.\,\text{Prime de risque de } P_{\text{Mkt}}$

$$\Rightarrow \; \boxed{E[R_i] = r_f + \underbrace{\beta\,.\left(\text{E}\,[\text{R}_{P_{\text{Mkt}}}] - r_f\right)}_{\text{Prime de risque } i}}$$

L'équation du MEDAF

La rentabilité espérée d'un actif à partir du bêta

Exemple **12.4** (B&DM-p.392) – calcul de la rentabilité espérée d'une action

Le taux de rémunération des OAT est de 4%. Quel est le Beta de l'action **Renault? Selon le MEDAF, quelle est la rentabilité espérée de Renault?**

	Expected Return	SD	Corr (RNO, Pm)
Renault (RNO)	?	35%	27%
P_{Mkt}	30%	20%	-

La rentabilité espérée d'un actif à partir du bêta

Exemple 12.5 (B&DM-p.393) – Calcul de la rentabilité espérée d'un actif à bêta négatif

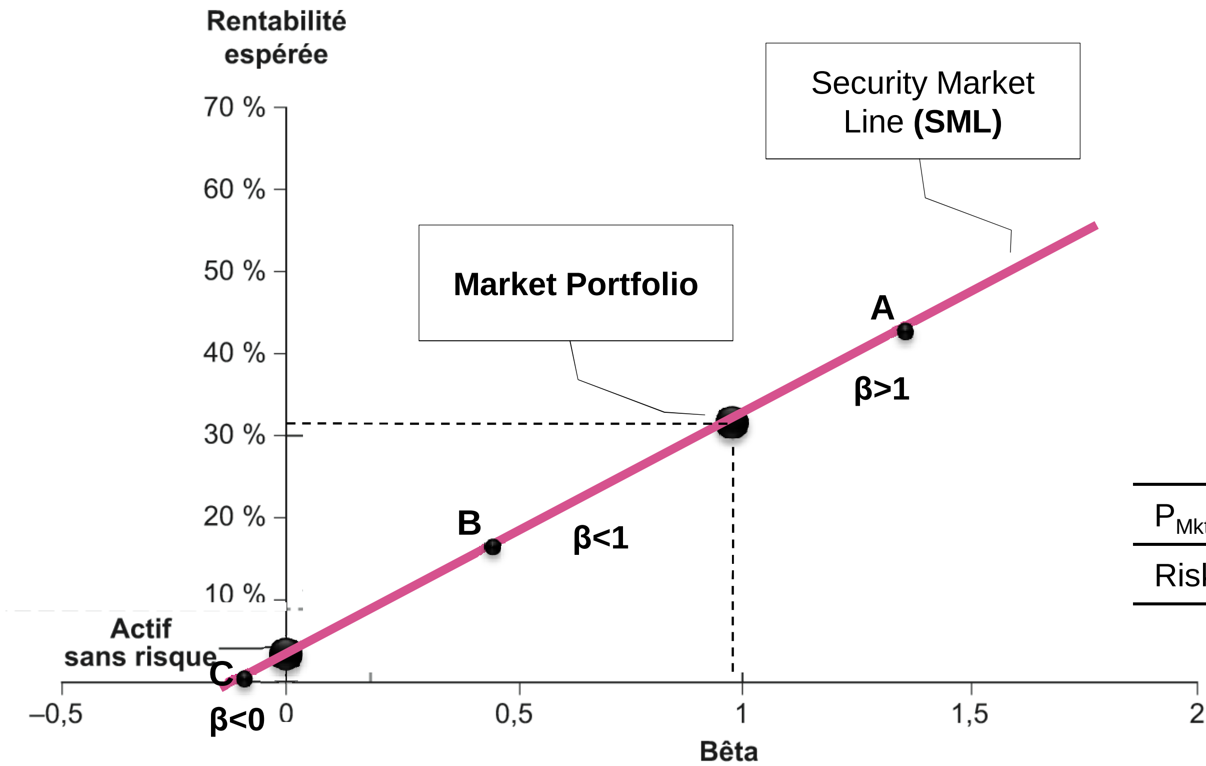
Le taux de rémunération des OAT est de 4%. Comparer la rentabilité espérée d'AXA et le taux des OAT. Qu'en déduisez vous?

	Expected Return	β
AXA	?	- 0.1
P_{Mkt}	30%	1

La Droite du MEDAF (The Security Market Line (SML))

La droite du MEDAF exprime la rentabilité espérée d'un actif en fonction de son β

$$E[R_s] = r_f + \beta . \left(\mathrm{E}[\mathrm{R}_{P_{\mathrm{Mkt}}}] - r_f \right)$$



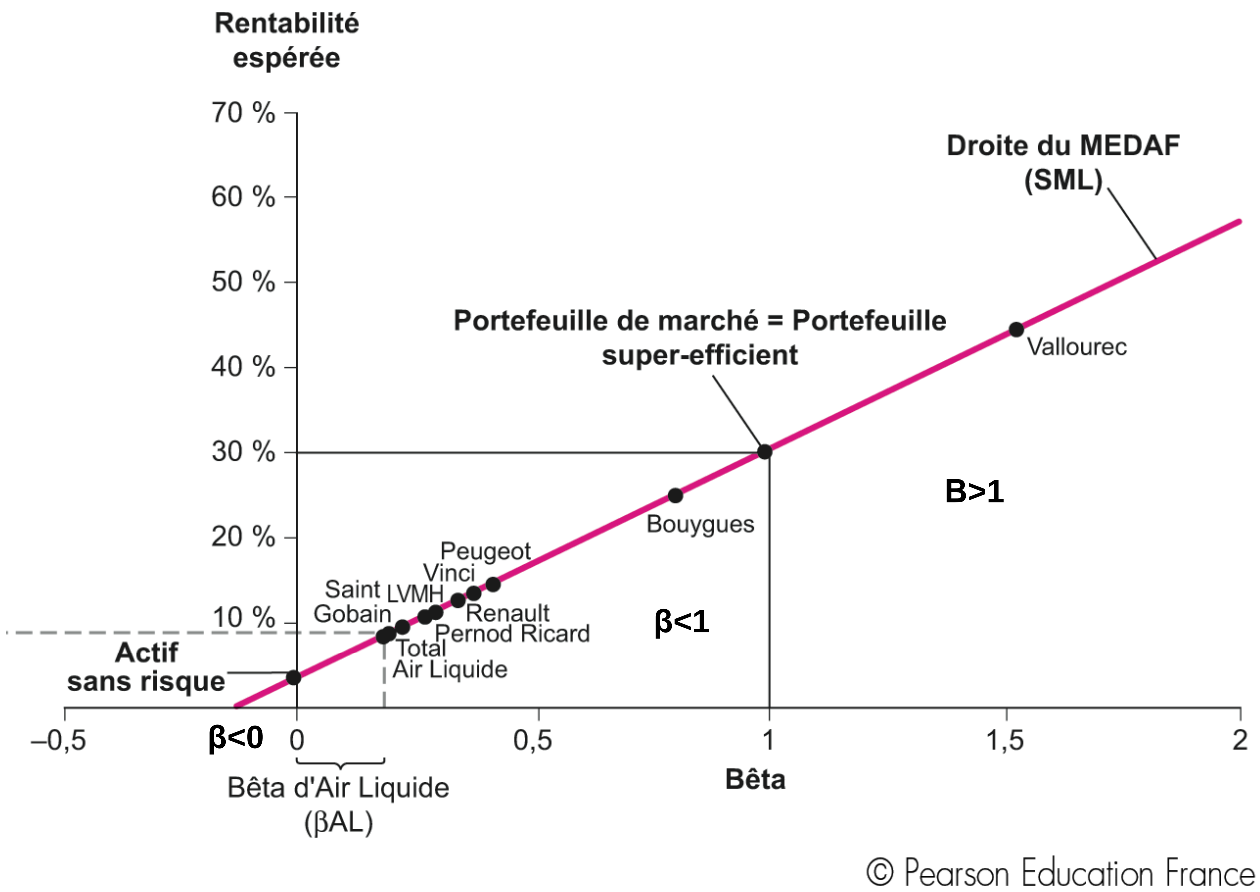
	Expected return	β
P_{Mkt}	30%	?
Risk-free Investment	4%	?

➧ Selon le MEDAF, La rentabilité d'un actif risqué dépend exclusivement de son β: de son risque commun

La Droite du MEDAF (The Security Market Line (SML))

Fig12.3b (B&DM-p.394) : La droite du MEDAF (SML)

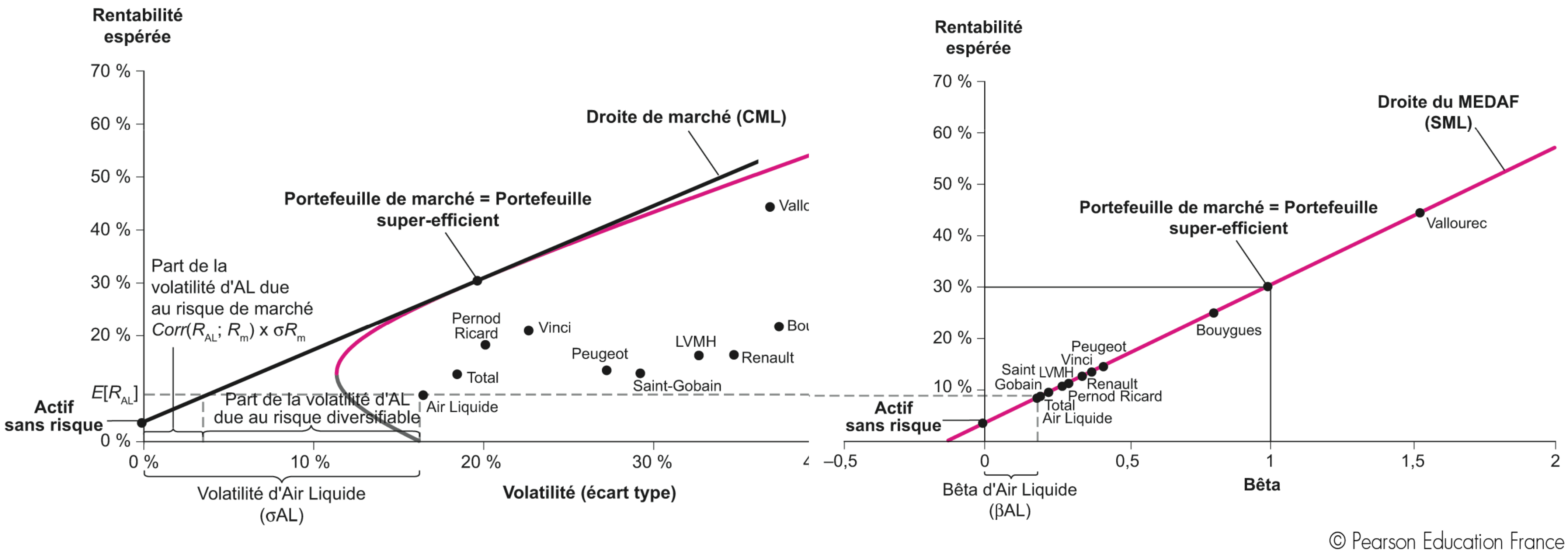
$$E[R_s] = r_f + \beta.(\mathrm{E}[\mathrm{R}_{P_{Mkt}}] - r_f)$$



- Selon le MEDAF, tous les titres et tous les portefeuilles possibles sont situés sur la droite du MEDAF

La Droite de Marché Versus la Droite du MEDAF

Fig12.3 (B&DM-p.394) : Droite de marché (CML) et droite du MEDAF (SML)



$$E[R] = \text{fonction de l'Ecart-Type}\,(SD)$$

$$E[R] = \text{fonction du } \beta$$

- Aucun titre risqué n'est situé sur la CML
  - Aucune relation linéaire entre la volatilité d'un titre et sa rentabilité espérée

Le Beta d'un portefeuille

Le Beta d'un portefeuille

La rentabilité espérée d'un portefeuille P dépend exclusivement du risque de marché, mesurée par son β

If $R_p = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$

$$\Rightarrow \quad \beta_P = \frac{Cov\left(R_P, R_{P_m}\right)}{Var\left[R_{P_m}\right]} = \frac{Cov\left(\sum_i x_i R_i, R_{P_m}\right)}{Var\left[R_{P_m}\right]} = \sum_i x_i \frac{Cov\left(R_i, R_{P_m}\right)}{Var\left[R_{P_m}\right]}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\beta_P = \sum_i x_i . \beta_i}$$

Le Beta d'un portefeuille

Exemple 12.6 (B&DM-p.395) – Calcul de la rentabilité espérée d'un portefeuille

Le taux de rémunération des OAT est de 4%. Selon le MEDAF, quelle est la rentabilité espérée d'un portefeuille équipondéré de ces deux titres?

	Rentabilité espérée	β
Action Danone (BN)	?	**0.5**
Action Infogrames (IFG)	?	**1.25**
P_{Mkt}	10%	

$$E[R_P] = \sum_i x_i E[R_i] \qquad E[R_s] = r_f + \beta.\left(E[R_{P_{Mkt}}] - r_f\right) \qquad \beta_P = \sum_i x_i.\beta_i$$

1st way

2nd way

Putting It All Together: The Capital Asset Pricing Model

Le Beta

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_{Mkt})}{[SD(R_{Mkt})]^2} = \frac{\overbrace{SD(R_i) . Corr(R_i, R_{Mkt})}^{\text{Part de la volatilité de l'actif i qui est commune à celle du portefeuille du marché}}}{SD(R_{Mkt})}$$

L'équation du MEDAF

$$E[R_i] = r_f + \underbrace{\beta . (E[R_{P_{Mkt}}] - r_f)}_{\text{Prime de risque } i}$$

Putting It All Together: The Capital Asset Pricing Model

Rappel:

le taux d’actualisation pour le calcul de la VAN est le coût d’opportunité du capital

Dans une situation où l'on est confronté à plusieurs choix d’investissement, **le coût d'opportunité d'un choix donné est estimée par la meilleure rentabilité que l'on peut obtenir sur le marché pour un projet de risque comparable.**

Selon le MEDAF, la rentabilité espérée d’un investissement risqué dépend uniquement de son Beta

➡ Le cout d’opportunité du capital nécessaire au calcul de la VAN est égal à la rentabilité espérée d’un actif qui a un Beta identique au projet d’investissement

Putting It All Together: The Capital Asset Pricing Model

Exemple : coût des capitaux propres d'un projet

Stocks	Volatility	Beta
Arcelor Mittal	25%	1.9
Vallourec	35%	1.15

Risk-free investment	Expected Return of P_{Mkt}
4%	10%

Quel est le titre le plus risqué ?

Quel titre comprend le plus de risque systématique ?

Quel est le coût du capital d'un projet dont le β est identique à celui de Vallourec ?

Quel est le coût du capital d'un projet dont le β est identique à celui d'Arcelor-Mittal ?

Quel projet a le coût du capital le plus élevé ?

Putting It All Together: The Capital Asset Pricing Model

Aux Etats-Unis, entre 70 % et 85 % des entreprises utilisent le MEDAF pour évaluer le coût de leurs capitaux propres

- Bruner, Eades, Harris et Higgins (1998) et Graham et Harvey (2001)

En Europe, environ 45 % des entreprises utilisent le MEDAF pour évaluer le coût de leurs capitaux propres

- Brounen, de Jong et Koedijk (2001)

Putting It All Together: The Capital Asset Pricing Model

Le MEDAF sert à calculer le **coût des capitaux propres**

Connaître la rentabilité exigée d'un actif est nécessaire au choix d'investissement

- Le MEDAF permet de calculer la prime de risque (= rentabilité exigée) à partir d'une estimation du bêta de l'actif

Le MEDAF est appliqué dans la **gestion de portefeuille**

Essayer de gagner de l'argent en bourse => identifier des opportunités d'arbitrage

- Le MEDAF permet d'identifier les titres sous ou sur-évalués
- investir dans ces titres avant que le marché ne ré-ajuste le portefeuille de marché en fonction des nouvelles valeurs
- On parle alors de **stratégie d'investissement active**

  Par opposition à la **stratégie d'investissement passive**

  - investir dans un fonds qui réplique le portefeuille de marché (ex : un *tracker* ETF indexé sur le CAC 40) et dans l 'actif sans risque (emprunt d 'Etat), dans les proportions souhaitées, puis attendre...

Quiz

	Vrai	Faux
Si les actions étaient corrélées positivement de façon parfaite, la diversification ne réduirait pas le risque d'un portefeuille	☐	☐
La corrélation entre les actifs d'un portefeuille n'influence pas la rentabilité espérée de celui-ci, mais seulement sa volatilité	☐	☐
Un portefeuille efficient : pour un même niveau de risque, il offre la rentabilité espérée la plus élevée	☐	☐
Seul le risque spécifique d'un actif détermine la prime de risque exigé par les investisseurs	☐	☐
Le bêta est une mesure du risque spécifique d'une action	☐	☐

Quiz

	Vrai	Faux
1. Il est inutile d'acheter des actions plus risquées et moins rentables que les actions composant notre portefeuille	☐	☐
2. Selon le MEDAF, une action de bêta nul a une rentabilité espérée nulle	☐	☐
3. Le bêta de l'action d'AXA est négatif. Sa prime de risque est donc négative	☐	☐
4. Les investisseurs exigent une rentabilité plus élevée pour les actions dont les rentabilités sont plus variables	☐	☐