Fondements de Finance

Chapitre 2. Valeur temps de l'argent : arbitrage, actualisation et capitalisation

Cours proposé par

Fahmi Ben Abdelkader ©

Version étudiants

Février 2012

Préambule

« Time is money»

Préambule

En 1913, que rapporte 1$?

En 2011, que rapporte 1$?

➡ **Un euro aujourd'hui ne vaut pas un euro demain**

Exemple: Un salaire de sortie d'école en 1999 n'est pas comparable avec celui d'une sortie en 2014…

Préambule

Préférez-vous recevoir 1 000 € maintenant, ou 1100 € dans un an ?

Préférez-vous recevoir 1 000 € maintenant, ou 200 € par an sur les 6 prochaines années ?

Un ami vous emprunte 1 000 € et vous promet 4 remboursements trimestriels de 250 € chacun. Est-ce un bon ami ?

Qu'est ce qu'on pourrait acheter avec 100€ il y a 10 ans ?

➡ **Un euro aujourd'hui ne vaut pas un euro demain**

Objectifs

En quoi consiste la valeur temporelle de l'argent ?

Comment peut-on expliquer qu'un euro d'aujourd'hui vaut plus qu'un euro dans un an ou plus ?

Quels outils et méthodes permettant de comparer deux sommes disponibles à des dates différentes ou qu'ils sont exposés à des risques différents ?

➡ **Fournir des techniques qui permettent une aide à la décision financière en prenant en compte la valeur temps de l'argent**

Plan du chapitre

1

Valeur temps de l'argent et Valeur Actuelle Nette (VAN)

La valeur temps de l'argent et le taux d'intérêt
Valeur actuelle et valeur future
La Valeur actuelle nette (VAN)

2

Arbitrage et Loi du prix unique

Opportunité d'arbitrage et loi du prix unique
Prix des actifs en l'absence d'opportunités d'arbitrage

3

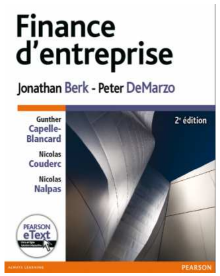
Actualisation et capitalisation

Les trois règles du voyage dans le temps
La VAN d'une séquence de flux
Les rentes perpétuelles et les annuités constantes
Les rentes et les annuités croissantes

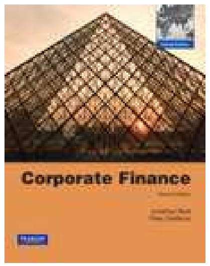
4

Modalités de calcul des flux, du TRI et de la durée de placement

Applications (calcul du TRI, calcul des flux de remboursement d'un emprunt, calcul du nombre de périodes d'un plan d'épargne, etc.)



Chap 3&4.



Chap 3&4.

Valeur temps de l'argent

Principe de préférence pour le présent:

Il est toujours préférable de recevoir 1€ aujourd'hui plutôt que dans un an

- Un euro aujourd'hui vaut plus qu'un euro dans un an

Comment le temps influence la valeur de l'argent ?

L'argent peut produire lui-même de l'argent …

- Un placement de 100 € pendant un an à 5%, nous donnera 105 €, à la fin de l'année
- **La valeur temps de l'argent** = différence entre la **valeur future** et la **valeur actuelle** d'un euro
- La valeur temps de l'argent peut être mesuré par le **taux d'intérêt**

À quoi sert la prise en compte de la valeur temps de l'argent ?

- Comparer par ex des recettes futures aux coûts actuels d'un lancement d'un projet

Le taux d'intérêt : un taux de change intertemporel

Le **taux d'intérêt sans risque** r_f (*Risk-free interest rate*) est le taux d' intérêt auquel on peut prêter ou emprunter contre la promesse certaine d'un remboursement futur.

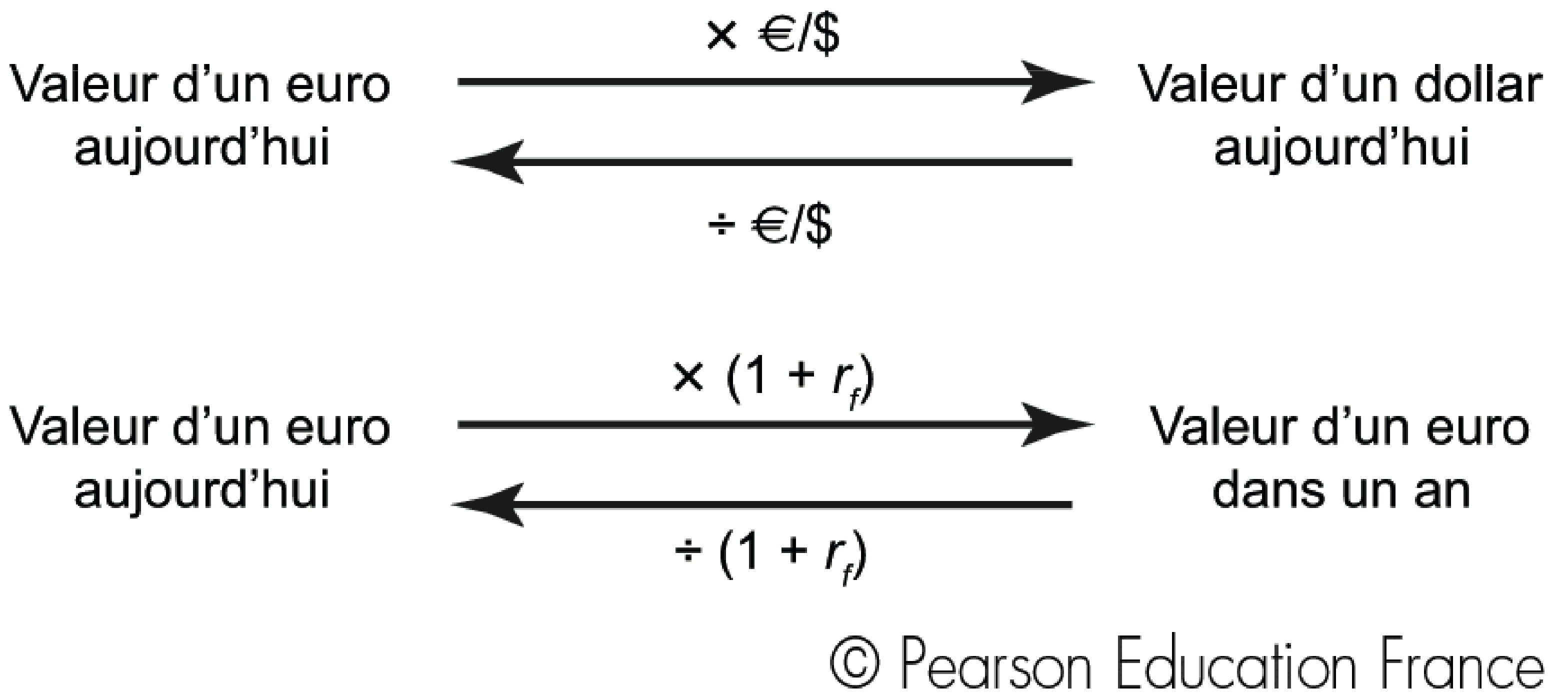
Par convention, le taux sans risque est exprimé en base annuelle.

Ce taux permet de convertir une somme d' argent «actuelle» en une somme d' argent «future»

- Un euro aujourd'hui vaudra $1€ * (1 + r_f)$ dans un an
- De manière symétrique, un euro dans un an vaut $\frac{1€}{(1 + r_f)}$ aujourd'hui.

Le taux d'intérêt : un taux de change intertemporel

Fig 3.1 (B&DM p.76) : taux de change et taux d'intérêt



Pour évaluer un projet, il faut que ses coûts et ses bénéfices soient exprimés dans la même unité : **même monnaie et à la même date**

Exemple : évolution du prix de l'essence dans le temps, ou pouvoir d'achat

La valeur actuelle (*Present Value*) et la valeur future (*Futur Value*)

Tableau 3.1 B&DM – p.76 : valeur actuelle et la valeur future d'un projet

r_f = 3%	Valeur actuelle	Valeur future
Coût : 100 000€ aujourd'hui	100 000€	
Recettes : 102 000€ dans un an		102 000€
Gain net (perte nette si négatif)		

Le projet est-il intéressant ?

➡

La valeur actuelle (*Present Value*) et la valeur future (*Futur Value*)

Valeur future (VF) d’un projet : exprime les coûts et bénéfices à la date finale du projet

Calculer Valeur actuelle (VA) d’un projet = « convertir » les coûts et bénéfices futurs en euros aujourd’hui

$$VF = VA * (1 + r_f)$$

$$VA = \underbrace{\frac{1}{(1 + r_f)}}_{\text{Facteur d'actualisation}} * VF$$

La valeur actuelle (*Present Value*) et la valeur future (*Futur Value*)

Exemple 3.4 B&DM – p.77 : Le coût de report d'un projet

La rénovation des colonnes du Palais Royal à paris devrait avoir lieu l'année prochaine. si le chantier est lancé l'an prochain : coût = 3,2 millions €. Un retard d'un an fera augmenter la facture de 5%. Quel est le coût de report de travaux d'une année si le taux d'intérêt est de 3%?

$$\mathrm{VA} = \frac{1}{(1 + r_f)} * VF$$

	Valeur actuelle	Valeur future
Coût si travaux l'an prochain		
Coût si travaux l'année d'après		
Coût du report		

La Valeur Actuelle Nette – VAN *(Net Present Value, NPV)*

La VAN : une mesure de la **création de valeur**

La VAN = la somme de la valeur actuelle de tous les flux générés (*Fn*) par le projet

$$\boxed{VAN = \sum_{n=0}^{N} \frac{F_n}{(1+r)^n}}$$

r = taux d'actualisation

La VAN d'un projet s'interprète comme la valeur aujourd'hui de la richesse qui sera potentiellement créée par le projet.

Un projet ne doit être retenu que si sa VAN est positive.

➡ Si VAN > 0 : création de valeur

La VAN : critère de décision d'investissement

Exemple : évaluer un projet d'investissement dans l'immobilier

r = 7%	Valeur actuelle	Valeur future
Coût d'achat actuel (350k€) :	- 350 000 €	
Prix de vente dans un an (400k€):		400 000€
VAN :		

La VAN : critère de décision d'investissement

Exemple : Comparaison de plusieurs projets (avec un taux d'intérêt de 20%)

Tableau 3.3 - Trois projets alternatifs

Projets	Flux aujourd'hui (€)	Flux dans un an (€)
A	42	42
B	– 20	144
C	– 100	225

$$VAN = \sum_{n=0}^{N} \frac{F_n}{(1+r)^n}$$

Projet	VAN
A	
B	
C	

Lorsqu'on doit choisir entre plusieurs projets, il faut retenir celui dont la VAN est la plus élevée.

Plan du chapitre

1

Valeur temps de l'argent et Valeur Actuelle Nette (VAN)

La valeur temps de l'argent et le taux d'intérêt
Valeur actuelle et valeur future
La Valeur actuelle nette (VAN)

2

Arbitrage et Loi du prix unique

Opportunité d'arbitrage et loi du prix unique
Prix des actifs en l'absence d'opportunités d'arbitrage

3

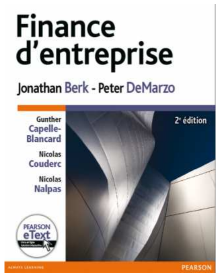
Actualisation et capitalisation

Les trois règles du voyage dans le temps
La VAN d'une séquence de flux
Les rentes perpétuelles et les annuités constantes
Les rentes et les annuités croissantes

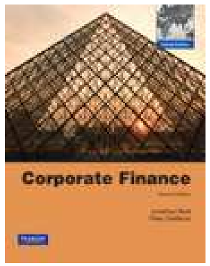
4

Modalités de calcul des flux, du TRI et de la durée de placement

Applications (calcul du TRI, calcul des flux de remboursement d'un emprunt, calcul du nombre de périodes d'un plan d'épargne, etc.)



Chap 3&4.



Chap 3&4.

Qu'est ce qu'on entend par arbitrage ?

Arbitrer = choisir **rationnellement** entre plusieurs alternatives, indépendamment de tout jugement de valeur

Arbitrage sur la base de comparaison **Coût - bénéfice**

- Analyse à partir des **prix de marché** et non des préférences subjectives qu'on accorde à l'actif
- Exprimer les coûts et les bénéfices dans la même unité

Tenir compte des **risques** et du décalage des flux dans le temps

- Valeur temps de l'argent
- Taux d'intérêt & taux de change

Qu'est ce qu'on entend par arbitrage ?

Opportunité d'arbitrage

Une opportunité d'arbitrage existe dans toute situation où il est possible de réaliser un profit **sans risque** et **sans mise de fonds initiale**

Exemple : le marché de l'or, supposons que :

	New York	Londres
Prix once d'or	250$	300$

- Opportunité d'arbitrage : possibilité de réaliser un gain en achetant de l'or à NY et le revendre à Londres

- Une opportunité d'arbitrage est un projet à VAN positive

Est-il possible que les différences de prix entre deux marchés existent durablement dans le temps ?

La Loi du prix unique

Les différences de prix d'un même actif sur un **marché concurrentiel** ne peuvent exister durablement

Exemple : le marché de l'or, supposons que :

	New York	Londres
Prix once d'or	250$	300$

- Opportunité d'arbitrage
  - ⇒ forte demande
  - ⇒ pression sur les prix
  - ⇒ convergence des prix

- **Lorsqu'un actif s'échange simultanément sur plusieurs marchés concurrentiels, alors son prix est le même sur tous les marchés.**

- **La loi du prix unique**

La Loi du prix unique

Par définition, sur un marché concurrentiel, il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage

No free lunch

L'évaluation des actifs financiers en AOA

Exemple : **le prix d'une obligation**

Une obligation sans risque verse 1 000 € dans un an

Si le taux d'intérêt sans risque est de 5%, quel est le prix de marché de cette obligation en **AOA** (absence d'opportunités d'arbitrage) ?

$$\mathrm{VA} = \frac{1}{(1 + r_f)} * VF$$

-

- Selon la loi du prix unique, les obligations offrant 1000€ dans un an doivent avoir le même prix aujourd'hui : 952.38€

En **AOA** (absence d'opportunités d'arbitrage) :

$$\boxed{Prix\ d'un\ actif = \sum \boldsymbol{VA}\,(flux\ futurs\ offerts\ par\ l'actif)}$$

L'évaluation des actifs financiers

Supposons qu'on peut trouver le même type d'obligation sur le marché à 940€ (pour 1000€ dans un an). Peut-on profiter de cette situation pour réaliser un profit sans prise de risque?

$$\text{Rentabilité} = \frac{\text{Gain en fin de période}}{\text{coût intial}}$$

➡ Rentabilité > 5% (=rentabilité $_{\text{obligation 952€}}$) => Opportunité d'arbitrage

Exemple de stratégie d'arbitrage : achat d'obligation par endettement (vous empruntez 952 € aujourd'hui avec lesquels vous achetez une obligation à 940 €. Dans un an vous remboursez l'emprunt avec les 1000 € de revenu de l'obligation)

Si le taux d'intérêt sans risque est de 5%:	Flux aujourd'hui	Flux dans un an
Emprunt bancaire	+952.38 €	-952.38 * (1+5%) = -1000€
Coût d'achat de l'obligation :	-940 €	+ 1000€
Flux net	+ 12.38 €	

➡ **OR**, Sur un marché concurrentiel, ces opportunités d'arbitrage disparaissent rapidement

➡ Les obligations sans risque auront le même taux de rentabilité : **le taux d'intérêt sans risque**

La rentabilité des actifs financiers en l'absence d'opportunité d'arbitrage

Marché concurrentiel

↓

Absence d'opportunité d'arbitrage (**AOA**)

↓

Les obligations doivent offrir la même rentabilité

↓

Les **investissements sans risque** doivent offrir la même rentabilité, égale au **taux d'intérêt sans risque**

La rentabilité des actifs financiers en l'absence d'opportunité d'arbitrage

Absence d'opportunité d'arbitrage (**AOA**)

$$\boxed{Valeur\ d'un\ actif = \sum \boldsymbol{VA}\,(flux\ futurs\ potentiellement\ générés\ par\ l'actif)}$$

$$Valeur\ d'un\ actif = \sum_{n=1}^{N} VA(F_n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{F_n}{(1+r)^n}$$

La rentabilité des actifs financiers en l'absence d'opportunité d'arbitrage

La **VAN** d'un investissement dans un actif financier sans risque est donc **nulle**

VAN (achat d'un actif) = VA (flux futurs d'un actif) – prix de l'actif = 0

➡ Pas de création de valeur, ni de destruction de valeur

Echanger un actif financier sur un marché concurrentiel ne crée ni ne détruit de la valeur

Calcul du prix d'un actif en l'absence d'opportunité d'arbitrage

Exemple 3.5 Un actif A offre 100 € aujourd'hui et 100 € dans un an. Taux d'intérêt sans risque = 10 %.

- Quel est le prix de A si AOA (avant le paiement des 100 € aujourd'hui) ?
- L'actif s'échange aujourd'hui à 195 € : qu'en déduisez-vous ?

En **AOA** (absence d'opportunités d'arbitrage) :

L'actif s'échange à 195€, soit à un prix supérieur à celui calculé en AOA : 190.9€

➡ L'actif A est **…………………………..**

➡ Il existe …………………………….

Plan du chapitre

1 Valeur temps de l’argent et Valeur Actuelle Nette (VAN)

La valeur temps de l’argent et le taux d’intérêt
Valeur actuelle et valeur future
La Valeur actuelle nette (VAN)

2 Arbitrage et Loi du prix unique

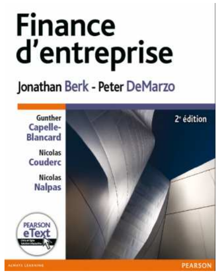
Opportunité d’arbitrage et loi du prix unique
Prix des actifs en l’absence d’opportunités d’arbitrage

3 Actualisation et capitalisation

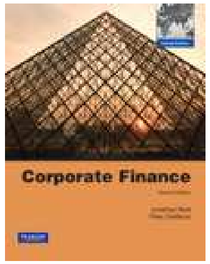
Les trois règles du voyage dans le temps
La VAN d’une séquence de flux
Les rentes perpétuelles et les annuités constantes
Les rentes et les annuités croissantes

4 Modalités de calcul des flux, du TRI et de la durée de placement

Applications (calcul du TRI, calcul des flux de remboursement d’un emprunt, calcul du nombre de périodes d’un plan d’épargne, etc.)



Chap 3&4.



Chap 3&4.

D'un projet d'un an à un projet de long terme

L'évaluation d'un projet repose sur **la comparaison des coûts et des bénéfices** en prenant en compte la **valeur temps de l'argent**

- Calculer la VAN

En 1993, **AIRBUS** a lancé le projet du **A380**. le premier avion de ce type a été livré en 2007

- Compte tenu de la durée sur laquelle s'étalent les coûts et les bénéfices, comment les dirigeants d'Airbus ont-ils évalué la VAN d'un tel projet (et donc le prix de vente futur de l'avion) ?

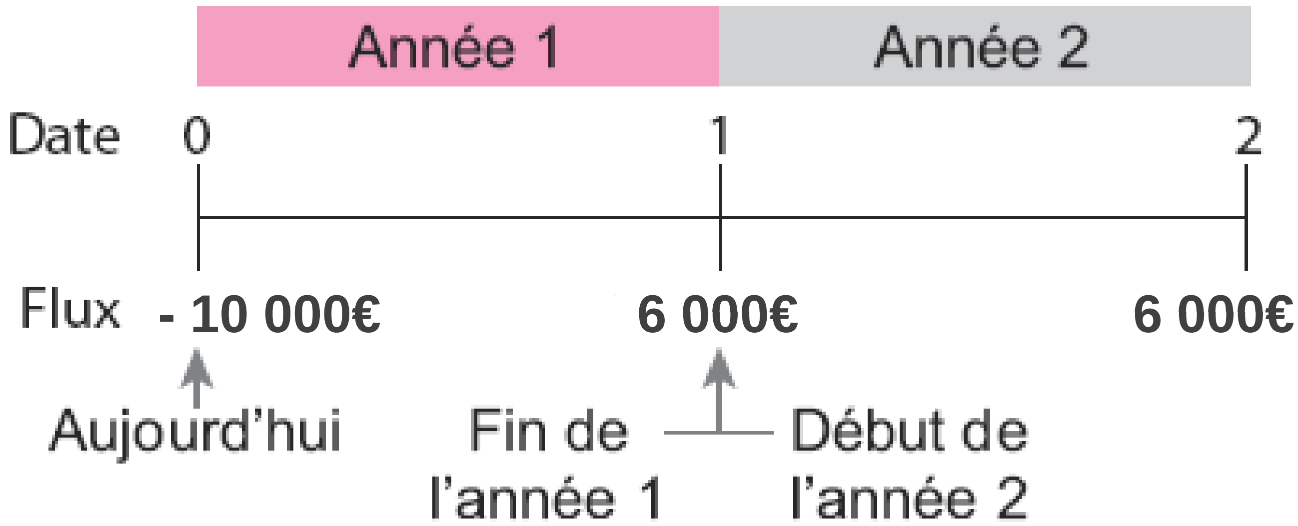
- Quels sont les outils pour calculer la VAN d'une séquence de flux ?

L'échéancier

Echéancier ou diagramme des flux (*timeline*)

- Représentation graphique d'une séquence de flux

Exemple : une banque accorde un prêt de 10 000 € remboursable par deux versements de 6 000 €



L'échéancier

Exemple 4.1 (B&DM)

Frais de scolarité = 10 000 € par an.
La scolarité dure deux ans.
Les paiements doivent être effectués à parts égales à chaque début de semestre.
Quel est le diagramme de flux ?

Les 3 règles du « voyage dans le temps »

1. **Pour comparer des flux se produisant à différentes dates, il faut tenir compte de la valeur temps de l'argent (*Comparing and combining values*).**

2. **Pour transposer un flux dans le futur, il faut le capitaliser.**

Valeur Actuelle $\xrightarrow{\text{Capitalisation (Compounding)}}$ Valeur Future

$$VF = VA * (1 + r_f)$$

3. **Pour transposer un flux dans le passé, il faut l'actualiser.**

Valeur Actuelle $\xleftarrow{\text{Actualisation (Discounting)}}$ Valeur Future

$$VA = \underbrace{\frac{1}{(1 + r_f)}}_{\text{Facteur d'actualisation (Discount factor)}} * VF$$

La **capitalisation** : transposer des flux dans le futur

Exemple :

Alain TAUXVABIEN, épargnelogue, vous conseille de placer 1 000 € aujourd'hui dans un compte bancaire bloqué au taux de 10%.
Quel est le montant équivalent dans un an ?
Dans deux ans ?

- Lorsque les intérêts portent eux-mêmes intérêts : on parle **d'intérêts composés**

- Processus de transposition des flux dans le futur : **composition** ou **capitalisation des intérêts** (*compounding*)

La **capitalisation** : transposer des flux dans le futur

Exemple :

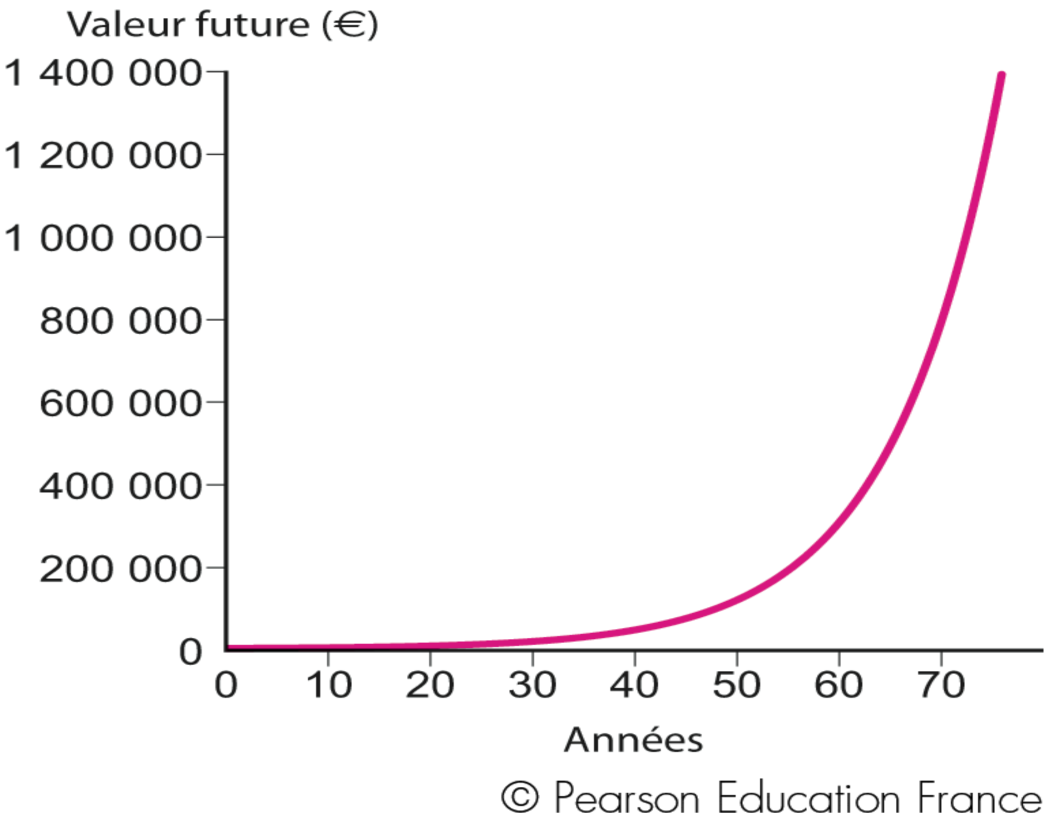
Alain TAUXVABIEN, épargnologue, vous conseille de placer 1 000 € aujourd'hui dans un compte bancaire bloqué au taux de 10%.
Quel est le montant équivalent dans 3 ans ?

La **capitalisation** : transposer des flux dans le futur

Pour transposer un flux futur *F* dans *n* périodes, il faut le capitaliser *n* fois. Si le taux d'intérêt *r* est constant :

$$VF_n = F * (1 + r)^n$$

Figure 4.9 (B&DM – p.109) : la puissance de la capitalisation (Valeur future de 1000€ au taux de 10%)



En 50 ans, la valeur a été multipliée par 117

En 75 ans, la valeur a été multipliée par 1272

La **capitalisation** : transposer des flux dans le futur

Exemple : (*source : Bodie Merton Thibièrge 2011)*

Pierre Minuit se rend célèbre en achetant, le 24 mai 1626, l'île de Manhattan aux Amérindiens Manhattes, en échange de verroterie et autres colifichets, pour l'équivalent de 60 florins néerlandais, équivalant à 24 dollars US du XIXe siècle.

Si la tribu indienne avait plutôt demandé un règlement en monnaie (24 USD), et avait investi cet argent au taux de 6% capitalisé annuellement, combien la tribu aurait-elle en l'an 2001, 375 ans après ?

L'**Actualisation** (*discounting*) : transposer des flux dans le passé

Exemple :

À la fin de vos études (dans trois ans), vous voulez réaliser votre rêve qui est de faire la route de la soie en auto-stop. Vous allez avoir besoin de10 000 € minimum.

Quelle somme devriez vous placer aujourd'hui au taux annuel de 10% ?

L'**Actualisation** (*discounting*) : transposer des flux dans le passé

La valeur actuelle d'un flux futur *F* versé dans *n* périodes est (Si le taux d'intérêt *r* est constant) :

$$VA_n = \frac{F}{(1+r)^n}$$

Exemple 4.2 (B&DM – pp.105-106)

- On envisage l'achat d'une obligation. Ce titre donne droit à un flux unique de 15 000 € dans dix ans.
- Le taux d'intérêt, sur le marché, est de 6 %.
- Quelle est la valeur de l'obligation aujourd'hui ?

Application des règles du « voyage dans le temps »

Exemple 4.3 (B&DM – p.107)

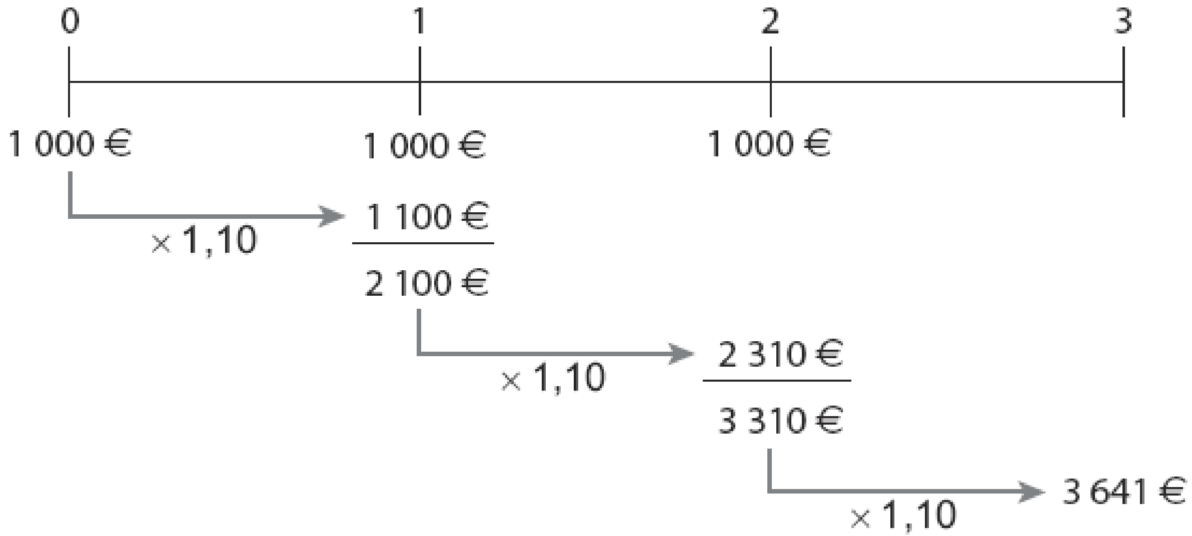
On envisage de placer 1 000 € aujourd'hui et 1000 € à la fin de chacune des deux prochaines années.
Le taux d'intérêt annuel est de 10 %.
Quelle somme obtient-on dans trois ans ?

➡ Plusieurs approches possibles

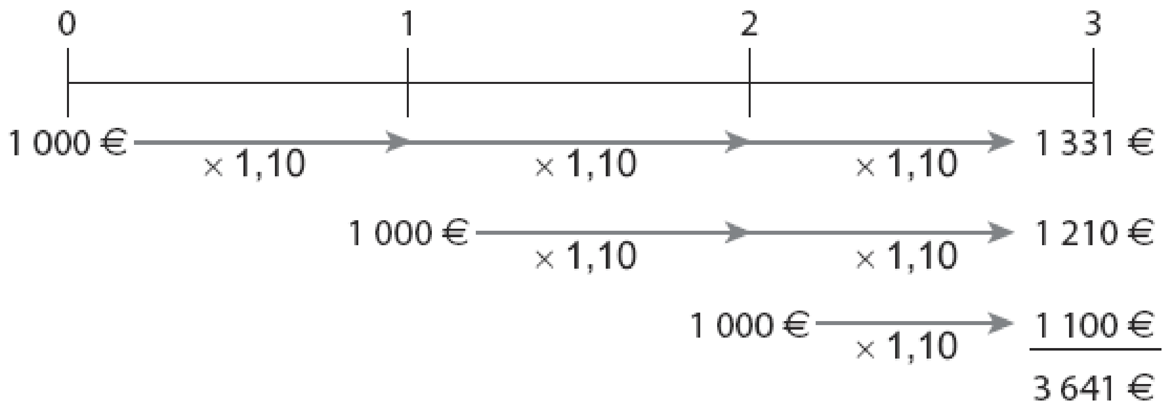
Application des règles du « voyage dans le temps »

Exemple 4.3 (B&DM – p.107)

1ère possibilité



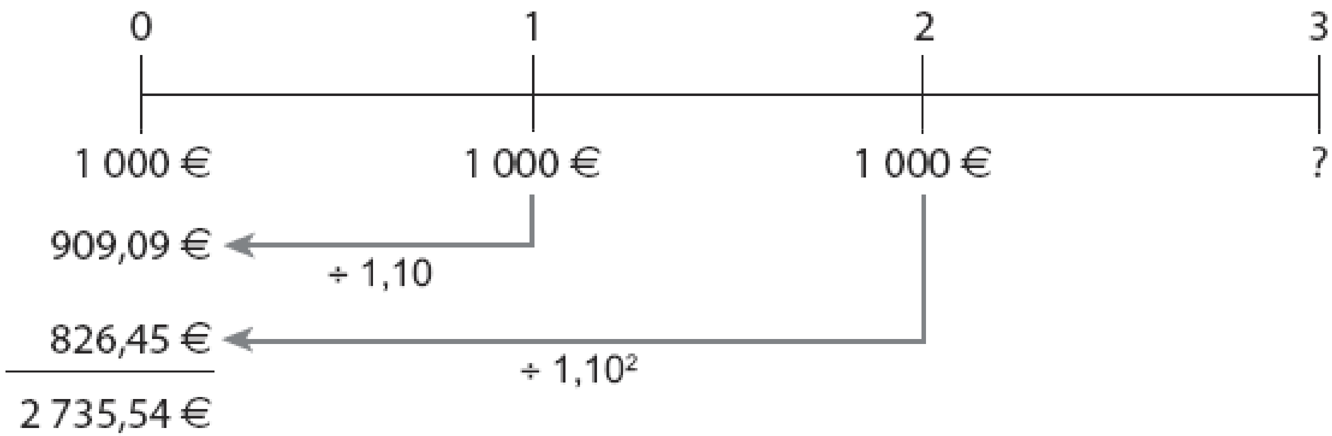
2ème possibilité

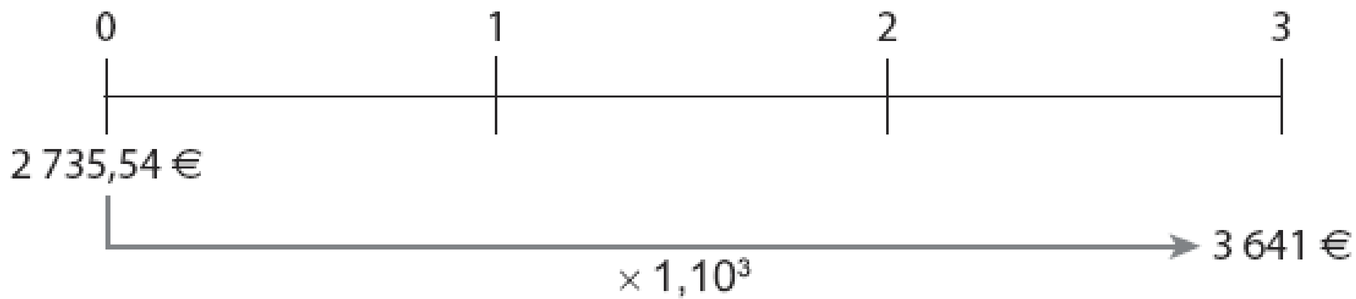


Application des règles du « voyage dans le temps »

Exemple 4.3 (B&DM – p.107)

- **3ème possibilité**





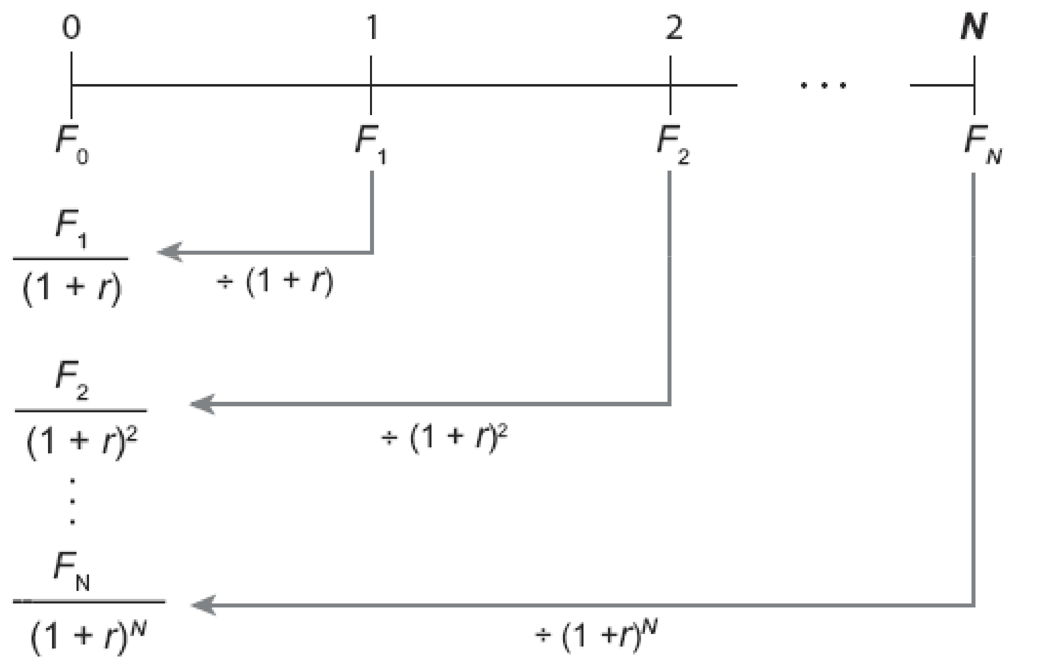
Les 3 règles du « voyage dans le temps »

Synthèse

Tableau 4.1 - Les trois règles du « voyage dans le temps »

Règle 1	Seuls des flux exprimés à une même date peuvent être comparés ou combinés	
Règle 2	Pour transposer des flux dans le futur, il faut les capitaliser	Valeur future d'un flux $VF_n = F \times (1 + r)^n$
Règle 3	Pour transposer des flux dans le passé, il faut les actualiser	Valeur actuelle d'un flux $VA = F / (1 + r)^n$

La valeur d'une séquence de flux



$$VA_n = \frac{F}{(1+r)^n}$$

$$VA = F_0 + \frac{F_1}{(1+r)} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{F_N}{(1+r)^N}$$

Valeur actuelle d'une séquence de flux

$$VA = \sum_{n=0}^{N} VA(F_n) = \sum_{n=0}^{N} \frac{F_n}{(1+r)^n}$$

La valeur d'une séquence de flux

Exemple 4.4 (B&DM – p.110)

Un étudiant emprunte à son père pour acheter une voiture. Il s'engage à rembourser le prêt dans les quatre ans et à offrir à son père le même taux que celui d'un placement bancaire.

Il pense par ailleurs pouvoir verser 5 000 € dans un an puis 8 000 € par an les trois années suivantes.

Le taux d'intérêt est de 6 %

Quelle somme l'étudiant peut-il emprunter à son père ?

La valeur d'une séquence de flux

Exemple 4.4 (B&DM – p.110)

Un étudiant emprunte à son père pour acheter une voiture. Il s'engage à rembourser le prêt dans les quatre ans et à offrir à son père le même taux que celui d'un placement bancaire.

Il pense par ailleurs pouvoir verser 5 000 € dans un an puis 8 000 € par an les trois années suivantes.

Le taux d'intérêt est de 6 %

Si le père avait placé pendant quatre ans les 24 890.6€ à la banque au taux de 6%, combien il aurait obtenu en fin de période ?

La valeur d'une séquence de flux

Exemple 4.4 (B&DM – p.110)

Un étudiant emprunte à son père pour acheter une voiture. Il s'engage à rembourser le prêt dans les quatre ans et à offrir à son père le même taux que celui d'un placement bancaire.
Il pense par ailleurs pouvoir verser 5 000 € dans un an puis 8 000 € par an les trois années suivantes.
Le taux d'intérêt est de 6 %
Si le père prête de l'argent à son fils et place sur un compte rémunéré les flux qu'il reçoit, combien il aurait obtenu en fin de période ?

La valeur d'une séquence de flux et le calcul de la VAN (*Net Present Value*)

Valeur future et valeur actuelle d'une séquence de flux

$$VF_n = VA * (1 + r)^n$$

Un projet peut être représenté comme une séquence de flux :

Les investissements = flux négatifs

Les recettes = flux positifs

$$\Rightarrow \quad VAN = \sum \boldsymbol{VA}\,(flux\ présents\ et\ futurs\ générés\ par\ le\ projet)$$

$$\boxed{VAN = \sum_{n=0}^{N} \frac{F_n}{(1 + r)^n}}$$

La valeur d'une séquence de flux et le calcul de la VAN

Exemple 4.5. (B&DM – p.111)

Alain TAUXVABIEN vous propose d'investir 1 000 € aujourd'hui dans un projet d'investissement en échange de 500 € à la fin de chacune des trois prochaines années.

Vous avez par ailleurs la possibilité de placer votre argent bloqué au taux de 10 % par an.

Doit-on investir dans ce projet ?

Les rentes perpétuelles

Rente perpétuelle (*perpetuity*)

Titre qui garantit à son détenteur, pour toujours, un flux fixe (intérêt) payé à intervalles réguliers.

Ne prévoit **pas de remboursement** du principal

$$VA = \frac{F}{(1+r)^1} + \frac{F}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{F}{(1+r)^n} + \cdots$$

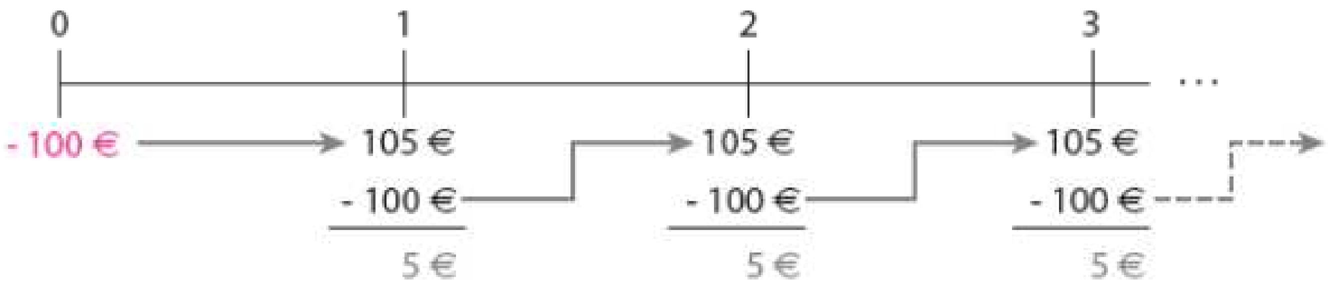
$$n \sim \infty \quad \Rightarrow \quad VA\,(F\ perpétuel) = \frac{F}{r}$$

Formule d'une suite géométrique de raison 1/(1+r) à l'infini

Voir démonstration dans Annexes : VA d'une rente perpétuelle

Les rentes perpétuelles

Exemple :
En plaçant 100 € à 5% on crée une rente perpétuelle de 5 € par an



D'après la **Loi du prix unique,** la VA d'une rente perpétuelle de 5 € par an doit être de 100 €

Généralisons : en plaçant P euros sur un compte bancaire, il est possible de retirer chaque année les intérêts, F = r × P, et laisser le principal, P, sur le compte.

$$\boxed{VA\,(F\ perpétuel) = \frac{F}{r}}$$

Exemple : une rente perpétuelle de 10€ à 10% vaut 1000€ en valeur d'aujourd'hui

Les rentes perpétuelles

Exemple 4.6 (B&DM – p.114) : créer une rente perpétuelle

L'association des étudiants du master finance décide de créer un gala annuel.
Le coût annuel du gala est de 30 000 €.
Les placements sont rémunérés au taux de 8 %.
Le premier gala est prévu dans un an.
Quelle somme l'association doit-elle placer afin de pouvoir financer l'organisation du gala chaque année éternellement ?

Les annuités constantes

Annuité (*annuity*)

Une annuité est une séquence de N flux égaux se produisant à intervalles réguliers.

Le principal est remboursé en N

L'intervalle peut être une période d'un an mais aussi un trimestre ou un mois … on dit aussi annuité

Lorsque les flux sont égaux, on parle **d'annuité constante**

Annuité constante vs **rente perpétuelle**

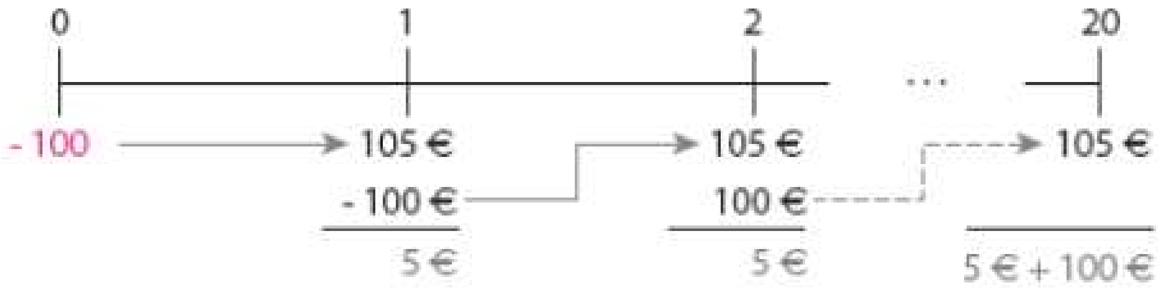
Pour une annuité constante, <u>le nombre de flux est limité</u>

- Comment calculer la VA d'une annuité constante lorsque N est trop grand ?

Les annuités constantes

Exemple :
Un placement de 100€ à 5%. Annuités constantes =5€. Remboursement du principal (100€) dans 20 ans.

Quelle est la VA d'une annuité constante de 5€ pendant 20 ans ?



Valeur actuelle d'une annuité constante

Généralisation :
Un placement P à un taux r. Annuités constantes de *F= r x p*. Remboursement du principal P au bout de N périodes.

$$P = VA(\text{annuité de } F \text{ pendant } N \text{ périodes}) + VA(P \text{ dans à la date } N)$$

$$VA(\text{annuité de } F \text{ pendant } N \text{ périodes}) = P - VA(P \text{ dans à la date } N)$$

$$= P - \frac{P}{(1+r)^N}$$

$$= P * \left[1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{VA(\text{annuité de } F \text{ pendant } N \text{ périodes}) = \frac{F}{r} * \left[1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right]}$$

Valeur actuelle d'une annuité constante

Exemple 4.7 (B&DM – p.117)

La loterie nationale propose à ses gagnants de recevoir :
Soit 1 Million € tous les ans pendant 30 ans (le premier versement ayant lieu aujourd'hui),
Soit 15 Millions € immédiatement.
Le taux d'intérêt est de 8 %.
Quelle solution retenir ?

Valeur **future** d'une annuité constante

Valeur future d'une annuité constante

1 $$VF_n = VA * (1+r)^n$$

2 $$VA(\text{annuité de } F \text{ pendant } N \text{ périodes}) = \frac{F}{r} * \left[1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right]$$

1 2 ➡ $$VF(\text{annuité constante}) = \frac{F}{r} * \left[1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right] * (1+r)^N$$

➡ $$\boxed{VF(\text{annuité constante}) = \frac{F}{r} * [(1+r)^N - 1]}$$

Valeur **future** d'une annuité constante

Exemple 4.8 (B&DM – p.118) : Se constituer une épargne retraite

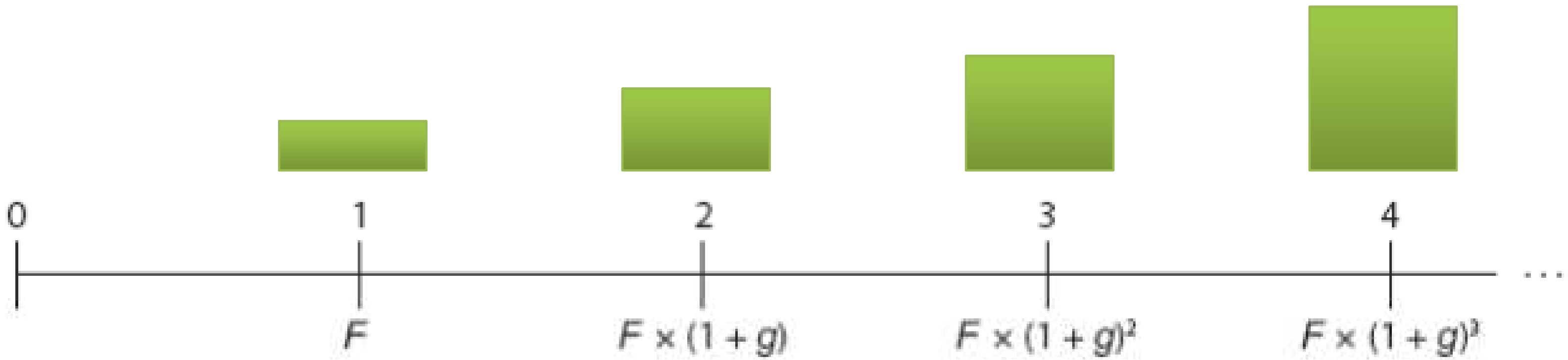
Ghislaine a 35 ans et décide d'épargner pour sa retraite 10 000 € tous les ans jusqu'à ses 65 ans. Le compte retraite est rémunéré à 10 %. De quelle somme Ghislaine disposera-t-elle le jour de ses 65 ans ?

Les rentes perpétuelles croissantes

Rentes perpétuelles croissantes (*Growing Perpetuities*)

Titre de dette qui garantit à son détenteur, pour toujours, une séquence de flux (intérêt) payé à intervalles réguliers **et dont le montant croît à taux constant**

Une Rente perpétuelle croissante avec un **premier paiement F** et un **taux de croissance *g*** :

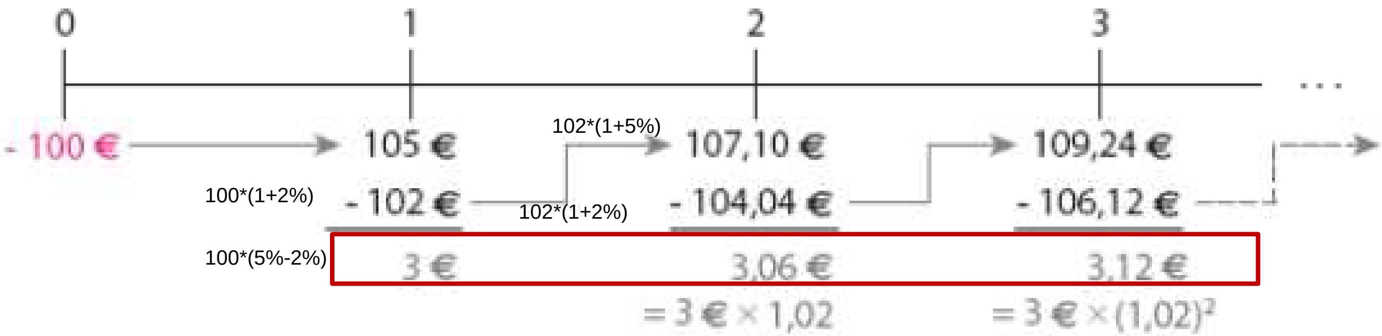


$$\Rightarrow \quad VA = \frac{F}{(1+r)} + \frac{F(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{F(1+g)^2}{(1+r)^3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(1+g)^{n-1}}{(1+r)^n}$$

Les rentes perpétuelles croissantes

Exemple

Une Rente perpétuelle croissante avec un **placement de 100€, un taux d'intérêt de 5%** et un **taux de croissance de *2%*** :

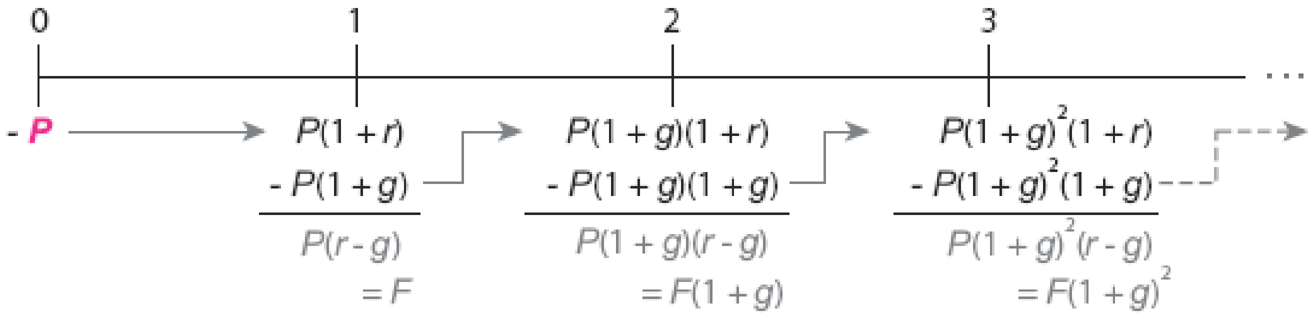


➡ Une Rente perpétuelle croissante avec un **premier flux de 3€** et un **taux de croissance de *2%***

➡ En AOA, cette rente doit avoir une valeur actuelle égale au coût initial : 100€

Les rentes perpétuelles croissantes

Généralisation



Valeur actuelle d'une rente perpétuelle croissante

$$\boxed{VA\ (rente\ perpétuelle\ croissante) = \frac{F}{(r-g)}}$$

Les rentes perpétuelles croissantes

Exemple 4.9 (B&DM – p. 121) - Se doter d'une rente perpétuelle (Bis)

L'association des étudiants du master finance décide de créer un gala annuel.
Le coût annuel d'un gala est de 30 000 €.
Les organisateurs n'ont pas pris en compte les effets de l'inflation. **Il est nécessaire de prévoir que le coût augmente de 4 % par an.**
Les placements sont rémunérés au taux de 8 %.
Le premier gala est prévu dans un an.
Quelle somme l'association doit-elle placer afin de pouvoir financer l'organisation du gala chaque année éternellement ?

Les annuités croissantes

Les annuités croissantes (*Growing Annuity*)

Une annuité croissante est une séquence de *N* flux **croissants** se produisant à intervalles réguliers

Valeur actuelle d'une annuité croissante

$$\boxed{VA(\text{annuité croissante } N \text{ périodes}) = \frac{F}{r-g} * \left[1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{N}\right]}$$

Les annuités croissantes

Exemple 4.10 (B&DM – p.122) Se constituer une épargne retraite (bis)

Ghislaine a 35 ans et décide d'épargner pour sa retraite 10 000 € tous les ans jusqu'à ses 65 ans. Le compte retraite est rémunéré à 10 %. **Elle prévoit une augmentation de salaire de 5 % tous les ans, ce qui lui permettra d'augmenter son placement annuel de 5%**.
De quelle somme disposera-t-elle le jour de ses 65 ans ?

Les annuités croissantes

La formule de l'annuité croissante est **une formule générale** à partir de laquelle il est possible de déduire toutes les formules présentées dans cette partie :

$$\boxed{VA(\text{séquence de flux}) = \frac{F}{r-g} * \left[1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^N\right]}$$

Une rente perpétuelle croissante peut être vue comme une annuité croissante avec N → ∞.

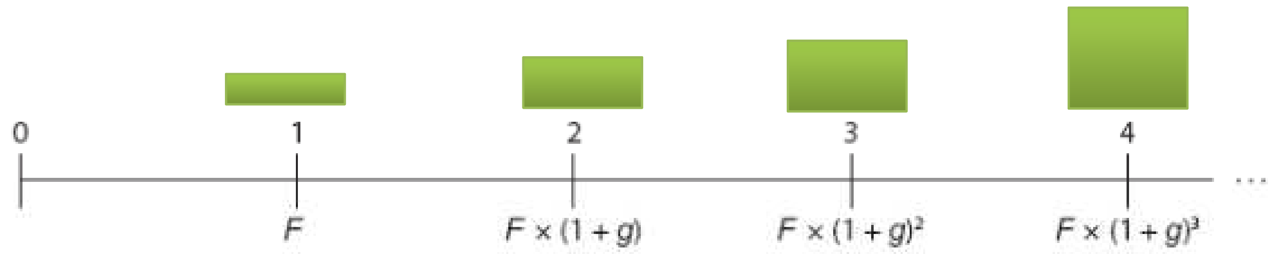
Si g < r, alors (1 + g) / (1 + r) < 1.

Puisque N → ∞, [(1 + g) / (1 + r)]N → 0 .

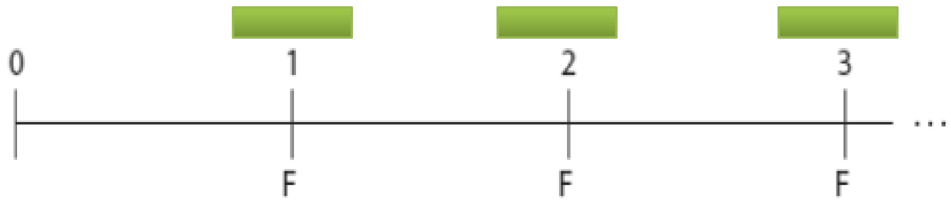
La formule d'une annuité croissante quand N → ∞ est donc :

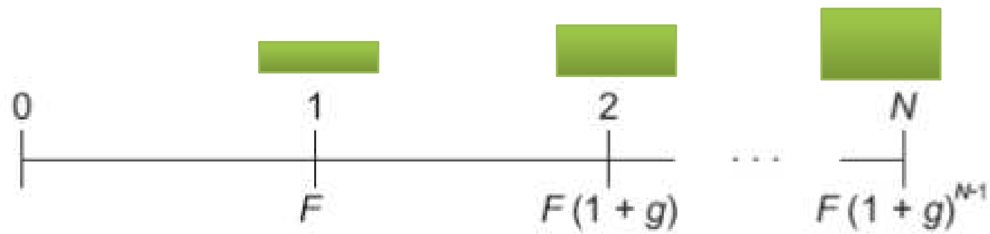
$$VA = \frac{F}{r-g}\left(1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^N\right) = \frac{F}{r-g}(1-0) = \frac{F}{r-g}$$

En résumé


0
1
2
3
4
...
F
$F \times (1+g)$
$F \times (1+g)^2$
$F \times (1+g)^3$


0
1
2
...
N
F
F
F


0
1
2
3
...
F
F
F


0
1
2
...
N
F
$F(1+g)$
$F(1+g)^{N-1}$

En résumé

Rentes et annuités

Une seule formule à retenir:

$$VA(\text{séquence de flux}) = \frac{F}{r-g} * \left[1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^N\right]$$

Type de flux *Type of cash-flows*	Flux constants *Constant cash-flows*	Flux croissants *Growing cash-flows*
Rentes perpétuelles *Perpetuities (last forever)*	Rentes perpétuelles (g=0 ; N -> ∞) $VA\ (F\ perpétuel) = \frac{F}{r}$	Rentes perpétuelles croissantes (N -> ∞) $VA\ (F) = \frac{F}{(r-g)}$
Annuités *Annuities (N periods)*	Annuités constantes (g=0) $VA(\text{annuité}) = \frac{F}{r} * \left[1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right]$	Annuités croissantes $VA(A) = \frac{F}{r-g} * \left[1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^N\right]$

Plan du chapitre

1

Valeur temps de l'argent et Valeur Actuelle Nette (VAN)

La valeur temps de l'argent et le taux d'intérêt
Valeur actuelle et valeur future
La Valeur actuelle nette (VAN)

2

Arbitrage et Loi du prix unique

Opportunité d'arbitrage et loi du prix unique
Prix des actifs en l'absence d'opportunités d'arbitrage

3

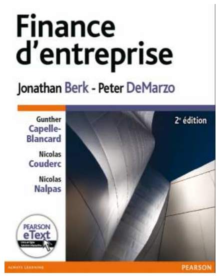
Actualisation et capitalisation

Les trois règles du voyage dans le temps
La VAN d'une séquence de flux
Les rentes perpétuelles et les annuités constantes
Les rentes et les annuités croissantes

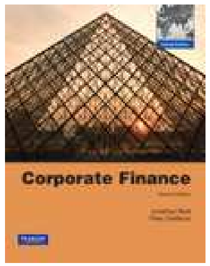
4

Modalités de calcul des flux, du TRI et de la durée de placement

Applications (calcul du TRI, calcul des flux de remboursement d'un emprunt, calcul du nombre de périodes d'un plan d'épargne, etc.)



Chap 3&4.



Chap 3&4.

Quel est le montant des flux à payer pour rembourser un prêt ?

Lorsqu'on contracte un prêt, on sait combien on désire emprunter, on connaît le taux d'intérêt, mais pas, *a priori*, ce que l'on devra payer au total pour honorer le prêt.

Exemple : flux à payer pour rembourser un prêt
Une entreprise envisage d'acheter à crédit une machine d'une valeur de 100 000 €.
Remboursement par annuités constantes pendant dix ans (le premier versement a lieu dans un an).
Le taux d'intérêt est de 8 %.
Quel est le montant du versement annuel (*F*) ?

Quel est le montant des flux à verser pour disposer d'un capital dans le futur ?

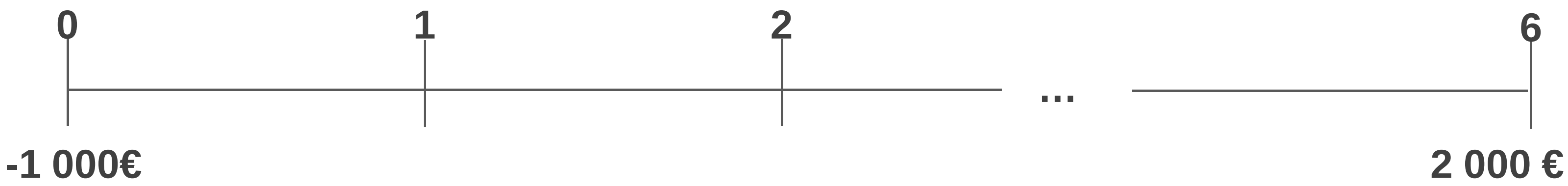
Exemple : flux à payer pour disposer de 60 000€ dans 18 ans
Germaine et son mari souhaitent épargner dès maintenant pour financer les études de leur enfant. Leur épargne est rémunérée 7% par an.
Combien doivent-ils placer chaque année afin de disposer de 60 000 € quand l'enfant aura 18 ans ?

Le Taux de Rentabilité Interne (TRI) : *Internal rate of Return (IRR)*

On connaît la valeur actuelle d'un projet.
On connaît le montant des flux.
Comment calculer le taux d'intérêt ?

➡ **Le TRI** : taux d'intérêt qui **annule la VAN**

Considérons un projet qui nécessite un investissement immédiat de 1 000 € et qui rapporte 2 000 € dans 6 ans.

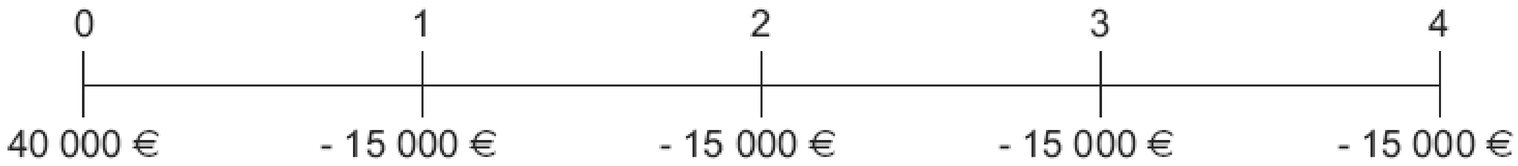


Quel est le taux d'intérêt tel que la VAN = 0 ?

Le Taux de Rentabilité Interne (TRI) : *Internal rate of Return (IRR)*

Une entreprise désire acheter un monte-charge d'un montant de 40 000 €. Elle finance cette opération via un emprunt payé par 4 versements annuels de 15 000 €. Quel est le taux de l'emprunt?

- => TRI



- Faute d'avoir une formule simple, il faut procéder soit par tâtonnement soit par interpolation linéaire

Le Taux de Rentabilité Interne (TRI) : *Internal rate of Return (IRR)*

Quel est *r* tel que : $$\frac{15\ 000€}{r} * \left[1 - \frac{1}{(1+r)^4}\right] = 40\ 000€$$

r = 10% : ➡ $$\frac{15\ 000€}{10\%} * \left[1 - \frac{1}{(1+10\%)^4}\right] = 47\ 548€$$

r = 20% : ➡ $$\frac{15\ 000€}{20\%} * \left[1 - \frac{1}{(1+20\%)^4}\right] = 38\ 831€$$

➡ ***r* = 18.45% = TRI** : ➡ $$\frac{15\ 000€}{18.45\%} * \left[1 - \frac{1}{(1+18.45\%)^4}\right] = 40\ 000€$$

Le Taux de Rentabilité Interne (TRI) : *Internal rate of Return (IRR)*

Interpolation linéaire :

On sait que le TRI est compris entre r_1 = 10% (VAN_1 = 7 548) et r_2 = 20% (VAN_2 = -1169).

Par application du théorème de Thalès :

$$\frac{r_1 - TRI}{r_1 - r_2} = \frac{VAN_1 - 0}{VAN_1 - VAN_2}$$

Donc,

$$TRI = r_1 + \frac{(r_2 - r_1) * VAN_1}{VAN_1 - VAN_2}$$

Ce qui donne :

$$TRI = 10\% + \frac{(20\% - 10\%) * 7\,548}{7\,548 - (-1169)} = 18.65\%$$

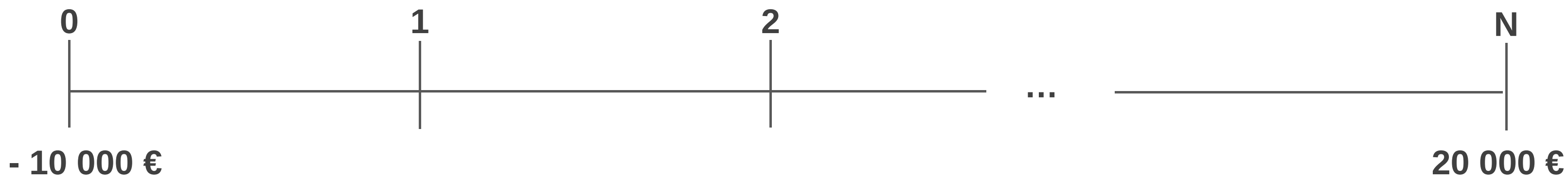
Ce qui est proche du résultat exact (18.45%). Cette approximation sera d'autant meilleure que l'intervalle de taux d'intérêt sera petit.

Le Taux de Rentabilité Interne (TRI) : *Internal rate of Return (IRR)*

Exemple 4.12 (B&DM – p.127) : Calcul du TRI
Bernabé, jeune diplômé, décide de fonder sa propre entreprise. Une banque d'investissement lui propose d'investir 1 Million € en échange de versements égaux à 125 000 € payables à chaque fin d'année pendant 30 ans.
Quel est le TRI de l'investissement ?

Calculer la durée de placement nécessaire à la constitution d'une épargne

Exemple :
Baptiste place 10 000 € sur un compte rémunéré à 10% par an. Combien de temps faut-il attendre avant de disposer de 20 000 € ?



- Quel est *N* ?

$$VF_n = VA * (1+r)^n = 10\ 000€ * (1.1)^N = 20\ 000€$$

- Il possible de procéder par tâtonnements successifs.

  Pour N = 7 ans : VF = 19 487€
  Pour N = 8 ans : VF = 21 436€

  => Il faut entre 7 et 8 ans pour pouvoir atteindre un capital de 20 000€

- Utiliser le **Logarithme népérien** : $ln(x^y) = y.ln(x)$

$$(1.1)^N = \frac{20\ 000€}{10\ 000€} = 2 \Rightarrow ln(1.1)^N = N.ln(1.1) = ln(2) \Rightarrow$$ *N* ≈ 7.3 ans

Calculer la durée de placement nécessaire à la constitution d'une épargne

Exemple 4.14 (B&DM – p.129): Durée de placement nécessaire à un achat immobilier
Jean-Louis Mahmoud épargne pour se constituer un apport personnel en vue d'un achat immobilier. Il dispose déjà de 10050 € et peut épargner 5 000 € à la fin de chaque année. L'épargne est rémunérée à 7,25 % par an. Combien d'années doit-il attendre avant de disposer de 60 000 € ?

Calculer la durée de placement nécessaire à la constitution d'une épargne de 20 000€

L'utilisation d'un tableur (B&DM – p.130)

Tableau 4.2 - Formules Excel relatives aux séquences de flux constants

Variable	Notation	Fonction Excel©	Utilité
Taux d'intérêt	*r*	TAUX	Calcule le taux d'intérêt par période d'une séquence de flux constants et réguliers
Nombre de périodes	*N*	NPM	Calcule le nombre de paiements d'une séquence de flux constants et réguliers avec un taux d'intérêt constant
Flux	*F*	VPM	Calcule le montant du flux périodique d'une séquence de flux constants avec un taux d'intérêt constant
Valeur actuelle	*VA*	VA	Calcule la valeur future d'une séquence de flux constants et réguliers avec un taux d'intérêt constant
Valeur future	*VF*	VC	Calcule la valeur future d'une séquence de flux constants et réguliers avec un taux d'intérêt constant

Concepts clés

1. Valeur temps de l'argent
2. VAN
3. Arbitrage et loi du prix unique
4. Le prix du risque
5. Actualisation vs Capitalisation
6. Rentes vs annuités
7. Taux de rendement interne (TRI)

1. What makes an investment decision a good one?
2. How important are our personal preferences in valuing an investment decision?
3. Why are market prices useful to a financial manager?
4. Why is arbitrage important to competitive market prices?
5. How does the Valuation Principle help a financial manager make decisions?
6. Can we directly compare dollar amounts received at different points in time?
7. Why is a cash flow in the future worth less than the same amount today?
8. What is a discount rate?
9. What is compound interest?
10. What is the intuition behind the geometric growth in interest?

1. What is the intuition behind the fact that the present value of a stream of cash flows is just the sum of the present values of each individual cash flow?
2. What must be true about a cash flow stream in order for us to be able to use the shortcut formulas?
3. What is the difference between an annuity and a perpetuity?
4. What are some examples of perpetuities?
5. How can a perpetuity have a finite value?
6. What are some examples of annuities?
7. What must be true about the growth rate in order for a growing perpetuity to have a finite value?
8. In what types of situations would it be useful to solve for the number of periods or the rate of return?

Pour un flux identique F chaque année pendant n années, on a :

$$VA = \frac{F}{(1+r)^1} + \frac{F}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{F}{(1+r)^n}$$

Soit

$$VA = \mathrm{F} * \left(\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

On reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique qui donne :

$$VA = \frac{\mathrm{F}}{r} * \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

Avec : $\frac{1}{r} * \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$ désigne la somme des n premiers coefficients d'actualisation

Pour un flux identique F chaque année à l'infini : la rente

On a :

$$n \sim \infty$$

Alors :

$$VA = \frac{\mathrm{F}}{r} * \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) = \frac{\mathrm{F}}{r}$$

Germaine et Barnabé souhaitent épargner dès maintenant pour financer les études dans les Grandes Ecoles de leur fille Bernadette. Les parents estiment que les frais de scolarité seraient de 40 000€. Les frais relatifs à la première année de scolarité (pré-Master) seraient de 10 000€. Ces frais seraient de 15 000€ par an pour les deux années suivantes. Supposons que Bernadette est née aujourd’hui et intégrera une Grande Ecole à l’âge de 18 ans. Supposons également que le taux d’intérêt annuel est fixe et sera de 6%.

Quelle est la valeur actuelle du total des frais de scolarité ?

Germaine et Barnabé souhaitent épargner dès maintenant pour financer les études dans les Grandes Ecoles de leur fille Bernadette. Les parents estiment que les frais de scolarité seraient de 40 000€. Les frais relatifs à la première année de scolarité (pré-Master) seraient de 10 000€. Ces frais seraient de 15 000€ par an pour les deux années suivantes. Supposons que Bernadette est née aujourd’hui et intégrera une Grande Ecole à l’âge de 18 ans. Supposons également que le taux d’intérêt annuel est fixe et sera de 6%.

Les parents envisagent d’effectuer 18 dépôts d’un même montant dans la banque à chaque date d’anniversaire. Combien devront-ils déposer chaque année ?

Vous venez de franchir le pas pour acheter la maison de vos rêves. Votre banquier vient de vous appeler pour vous annoncer que la banque a validé votre dossier et qu'elle vous accorde comme convenu un prêt de 500 000€ avec un taux d'intérêt de 4%. Le remboursement se fera par annuités constantes pendant 20 ans (le premier versement a lieu dans un an). Quel sera le montant du versement annuel ?